CORRECTION DU DM 12 : LOGARITHME NÉPÉRIEN

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad g(0) = 0$$

Que doit-on prouver pour démontrer que g est continue en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$) ?

Pour démontrer que g est continue en 0 il faut montrer que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$. Notons que g est continue pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Objectif : Démontrer que la fonction g est continue en 0 de deux manières différentes.

1**ère** **méthode** : Etude de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ en utilisant le théorème des gendarmes.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$h(X) = \ln(X+1) - X$$

1. Calculer $\lim\limits_{X\to 0^+} h(X)$.

$$\lim_{X\to 0^+} h(X) = \ln(0+1) - 0 = 0$$

2. Etudier les variations de h, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}^+$.

h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-x-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

h' est du signe de $-x$ sur $\mathbb{R}^+$ puisque $x+1>0$, par conséquent $h'<0$ sur $\mathbb{R}^+$, et on a :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	0 $\searrow$	

3. En déduire que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^+ \qquad \ln(X+1) \leq X$$

On vient de démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ et que h est une fonctions strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad h(x) \leq 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) - x \leq 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) \leq x$$

4. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq \ln(x^2+1) \leq x^2$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$, par conséquent $x^2+1 \geq 1$, or ln est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, par conséquent :

$$\ln(x^2+1) \geq \ln 1 = 0$$

De plus on a démontré dans la question précédente que pour tout $X \in \mathbb{R}^+$ on a $\ln(X+1) \leq X$, en posant $X = x^2$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x^2+1) \leq x^2$$

Au final :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq \ln(x^2+1) \leq x^2$$

5. Déduire de la question précédente :

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$0 \leq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \leq x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a d'après la question précédente :

$$0 \leq \ln(x^2+1) \leq x^2 \Longleftrightarrow \frac{0}{x} \leq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \leq x \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \leq x$$

En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$.

De plus on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} 0$, par conséquent d'après le théorème des gendarmes on conclut que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}$:

$$x \leq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \leq 0$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $0 \leq \ln(x^2+1) \leq x^2$, par conséquent pour tout $x < 0$ on a :

$$0 \leq \ln(x^2+1) \leq x^2 \Longleftrightarrow \frac{0}{x} \geq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \geq x \Longleftrightarrow x \leq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \leq 0$$

En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} 0$, par conséquent d'après le théorème des gendarmes on conclut que :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$$

6. Conclure.

   Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$$

   Par conséquent g est continue en 0.

2$^{\text{ème}}$ **méthode** : Etude de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ en utilisant la définition du nombre dérivée.

On rappelle que si f est une fonction dérivable en a alors :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

1. Déterminer une fonction f et un réel a tel que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

   En posant $f(x) = \ln(x^2+1)$ et $a = 0$ on a, puisque $\ln(0^2+1) = 0$:

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

3. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$, puis conclure.

   f est une fonction dérivable en 0, par conséquent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = f'(0) = \frac{2\times 0}{0^2+1} = 0$$