CORRECTION DU DM 11 : LOGARITHME DÉCIMAL

Partie I : Etude de la fonction logarithme décimal.

On considère la fonction log, aussi appelé logarithme décimal, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

1. Déterminer les limites de log en $+\infty$ et en 0^+. Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote.

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\ln 10 > \ln 1 = 0$ d'où :

   $$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$$

   De plus on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\ln 10 > \ln 1 = 0$ d'où :

   $$\lim_{x\to 0^-} \log(x) = -\infty$$

2. Etudier les variations de la fonction log. Dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a :

   $$\log'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}$$

   qui est du signe de $x \ln 10$, mais sur $\mathbb{R}^{**}$, $x > 0$ et $\ln 10 > 0$ d'où $log'(x) > 0$ et on en déduit le tableau de variations de la fonction log :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$ on a :

   $$\log(xy) = \log x + \log y \qquad \text{et} \qquad \log\frac{x}{y} = \log x - \log y$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$ on a :

   $$\log(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln 10} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln 10} = \frac{\ln x}{\ln 10} + \frac{\ln y}{\ln 10} = \log x + \log y$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$ on a :

   $$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln 10} = \frac{\ln x - \ln y}{\ln 10} = \frac{\ln x}{\ln 10} - \frac{\ln y}{\ln 10} = \log x - \log y$$

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

   $$\log(x^n) = n \log x$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

   $$\log\left(x^n\right) = \frac{\ln\left(x^n\right)}{\ln 10} = \frac{n \ln x}{\ln 10} = n \log x$$

Partie II : Ecriture Scientifique (caractéristique et mantisse), et logarithme décimal

Tout nombre réel x strictement positif admet une écriture scientifique de la forme :

$$x = a \times 10^n \qquad \text{avec } a \in [1;10[\text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

1. Donner l'écriture scientifique de 1450, puis de $0,000314$.
   $1450 = 1,45 \times 10^3$ et $0,000314 = 3,14 \times 10^{-4}$.
2. Montrer que $\log(1450) = 3 + \log(1,45)$. Proposer une écriture semblable pour $\log(0,000314)$.
   $\log 1450 = \dfrac{ln 1450}{ln 10} = \dfrac{\ln 1,45 \times 10^3}{\ln 10} = \dfrac{\ln 1,45}{\ln 10} + \dfrac{3 \ln 10}{\ln 10} = \log 1,45 + 3$ et $\log 0,000314 = \log 3,14 \times 10^{-4} = \log 3,14 + \log 10^{-4} = \log 3,14 - 4 \log 10 = \log 3,14 - 4$.
3. Montrer qu'il existe un réel $a \in [1;10[$ et un entier n tels que

$$\log x = n + \log a$$

Soit x un réel positif alors x admet une écriture scientifque de la forme $x = a \times 10^n$ avec $a \in [1;10[$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\log x = \log a \times 10^n = \log a + \log 10^n = \log a + n \log 10 = \log a + n$$

Remarque :
- Puisque la fonction log est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, pour tout réel a compris entre 1 et 10 (exclu), $\log(a)$ est compris entre 0 et 1. L'entier relatif n est donc la partie entière de $\log(x)$ et $\log(a)$ la partie décimale à ajouter à n pour obtenir $\log(x)$.
- La partie entière de $\log(x)$ est appelée la **caractéristique** du log.
- La partie décimale à rajouter à la partie entière s'appelle la **mantisse**.

Partie III : Effectuer sans calculatrice un calcul en utilisant une table du logarithme décimal

1. Montrer que $\log(1,5) = \log 15 - 1$. En déduire à l'aide de la table la valeur à 10^{-4} près de $\log 1,5$.

   $\log(1,5) = \log \dfrac{15}{10} = \log 15 - \log 10 = \log 15 - \dfrac{\ln 10}{\ln 10} = \log 15 - 1$. Le tableau ci-après donne une valeur approchée de $\log 15 \simeq 1,17609$, par conséquent on en déduit que $\log 1,5 \simeq 1,17609 - 1 = 0,17609 \simeq 0,1761$.
2. En utilisant un raisonnement analogue, lire sur la table la valeur à 10^{-4} près de $\log 3,2$.
   De la même manière on montre que $\log 3,2 = \log 32 - 1 \simeq 0,5051$.
3. En utilisant l'égalité $\log(xy) = \log x + \log y$, montrer que : $\log(1,5 \times 3,2) \simeq 0,6812$.
   $\log(1,5 \times 3,2) = \log 1,5 + \log 3,2 \simeq 0,1761 + 0,5051 = 0,6812$
4. En utilisant la table des log, en déduire que $1,5 \times 3,2 \simeq 4,8$.
   En observant la table des log on s'aperçoit que $\log 48 \simeq 1,6812 \Longrightarrow \log 4,8 \simeq 0,6812$ et donc que $1,5 \times 3,2 \simeq 4,8$.
5. (a) A l'aide de la table des logarithmes montrer que :

$$\log \sqrt[3]{50} \simeq 0,56$$

   On sait que $50^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln 50}$.
   On a donc :

$$\log \sqrt[3]{50} = \log 50^{\frac{1}{3}} = \frac{\ln 50^{\frac{1}{3}}}{\ln 10} = \frac{\ln e^{\frac{1}{3}\ln 50}}{\ln 10} = \frac{\frac{1}{3}\ln 50}{\ln 10} = \frac{\log 50}{3}$$

   D'après la table des logarithmes décimaux $\log 50 \simeq 1,69897$, par conséquent $\log \sqrt[3]{50} \simeq \dfrac{1,69}{3} \simeq 0,56$.

   (b) Constater, à l'aide de la table des logarithmes que $\log 37 - 1 \simeq 0,56$.
   D'après la table des logarithmes $\log 37 = 1,56 \Longrightarrow \log 3,7 = \log 37 - 1 \simeq 0,56$

   (c) En déduire que $\sqrt[3]{50} \simeq 3,7$.
   On a donc $\log 3,7 \simeq \log \sqrt[3]{50} \Longrightarrow \sqrt[3]{50} \simeq 3,7$.
6. En utilisant une démarche similaire, démontrer à l'aide de la table du logarithme décimal que :

$$\sqrt[4]{70} \simeq 2,9$$

$$\log \sqrt[4]{70} = \frac{\log 70}{4} \simeq \frac{1,84}{4} = 0,46 \qquad \text{or} \qquad \log 29 \simeq 1,46 \Longrightarrow \log 2,9 \simeq 0,46 \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt[4]{70} \simeq 2,9$$

n	$\log n$	n	$\log n$	n	$\log n$	n	$\log n$	n	$\log n$
1	0	21	1.32221929	41	1.61278386	61	1.78532984	81	1.90848502
2	0.301029996	22	1.34242268	42	1.62324929	62	1.79239169	82	1.91381385
3	0.477121255	23	1.36172784	43	1.63346846	63	1.79934055	83	1.91907809
4	0.602059991	24	1.38021124	44	1.64345268	64	1.80617997	84	1.92427929
5	0.698970004	25	1.39794001	45	1.65321251	65	1.81291336	85	1.92941893
6	0.77815125	26	1.41497335	46	1.66275783	66	1.81954394	86	1.93449845
7	0.84509804	27	1.43136376	47	1.67209786	67	1.8260748	87	1.93951925
8	0.903089987	28	1.44715803	48	1.68124124	68	1.83250891	88	1.94448267
9	0.954242509	29	1.462398	49	1.69019608	69	1.83884909	89	1.94939001
10	1	30	1.47712125	50	1.69897	70	1.84509804	90	1.9542251
11	1.041392685	31	1.49136169	51	1.70757018	71	1.85125835	91	1.95904139
12	1.079181246	32	1.50514998	52	1.71600334	72	1.8573325	92	1.96378763
13	1.113943352	33	1.51851394	53	1.72427587	73	1.86332286	93	1.96848295
14	1.146128036	34	1.53147892	54	1.73239376	74	1.86923172	94	1.97312785
15	1.176091259	35	1.54406804	55	1.74036269	75	1.87506126	95	1.97772361
16	1.204119983	36	1.5563025	56	1.74818803	76	1.88081359	96	1.98227123
17	1.230448921	37	1.56820172	57	1.75587486	77	1.88649073	97	1.98677173
18	1.255272505	38	1.5797836	58	1.76342799	78	1.8920946	98	1.99122608
19	1.278753601	39	1.59106461	59	1.77085201	79	1.89762709	99	1.99563519
20	1.301029996	40	1.60205999	60	1.77815125	80	1.90308999	100	2