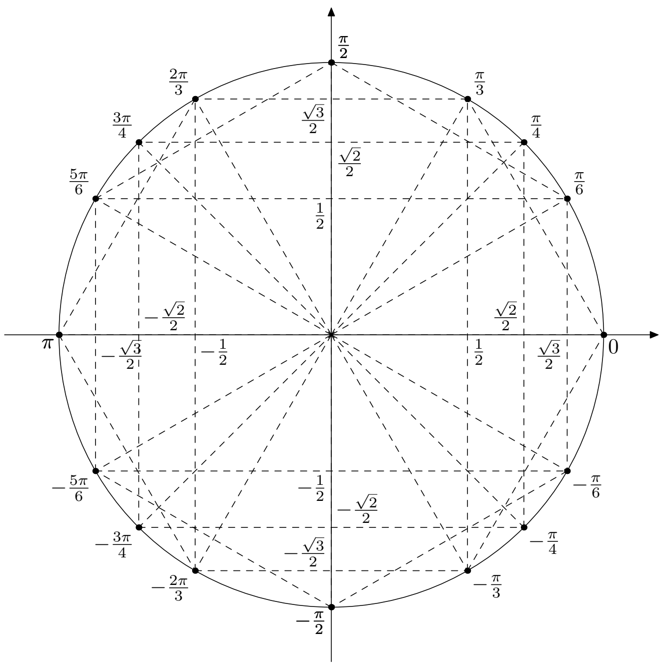
CORRECTION DU DM 10 : COMPLEXES



On utilise assez souvent les valeurs des cosinus et des sinus que l'on peut lire sur le cercle trigonométrique ci-contre :

Partie A : D'où viennent ces curieux résultats ?

1. Considérons un triangle ABC rectangle et isocèle en A avec AB = 1. Montrer que BC = $\sqrt{2}$.
   D'après Pythagore, c'est immédiat.
2. A l'aide de la trigonométrie de collège, montrer que :

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Par symétrie ou en raisonnant de manière identique dans des triangles particuliers, on démontre aisément tous les autres résultats inscrit sur le cercle trigonométrique. Dans la suite de ce DM, on se demande comment trouver les cosinus et les sinus d'autres angles, moins particulier.

Partie B : Où l'on détermine le cos $\frac{7\pi}{12}$ et le sin $\frac{7\pi}{12}$.

1. Effectivement : $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$.
2. Dans un repère orthonormal on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{et} \qquad z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(a)

$$|z_A| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$|z_B| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

Etant donné que le module de chacun de ses nombres complexes vaut 1, on peut les écrire sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$:

$$z_A = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$

$$z_B = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

(b)

$$z_A = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad z_B = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(c)

$$z_A \times z_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$$

(d) $|z_C| = |z_A| \times |z_B| = 1$ et $arg(z_C) = arg(z_A) \times arg(z_B) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} [2\pi] = \frac{7\pi}{12} [2\pi]$.

$$z_C = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

(e) Ainsi :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Partie C :

1.

$$z_D = \frac{z_A}{z_B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{2+2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

Le module de z_D est le quotient des modules, donc 1 ici, et l'argument de z_D est la différence des arguments donc $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ ici, par conséquent :

$$z_D = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

2. On en déduit

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3. Comme $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$, posons :

$$z_F = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12}$$

Déterminons alors la forme algébrique de z_F :

$$z_F = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$$

On conclut alors que :

$$\cos\frac{-\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{-\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$