BACCALAUREAT GENERAL ROSE

SESSION 2012

MATHEMATIQUES-NON SPECIALISTE

Série : **S**

A rendre pour le : **24/04/2012**. COEFFICIENT : **7**.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC ROSE

Exercice 1. (4 points)

Partie A : On rappelle que pour tous les points E et F de l'espace, $EF^2 = \overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EF}$.
Soient A et B deux points disctincts de l'espace et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que, pour tout M de l'espace, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = AB^2$$

Partie B :
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations respectives : $3x + 4y + z - 1 = 0$ et $x - 2y - z + 5 = 0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1; 0; 4)$ et $(3; -4; 2)$.

1. Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants.

2. On nomme Δ la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.
   (a) Montrer que le point A appartient à la droite Δ.
   (b) Montrer que $\vec{u}(1; -2; 5)$ est un vecteur directeur de la droite Δ.
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évalutation.*
   Soit (E) l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$.
   Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et de la droite Δ. On précisera les coordonnées de ces points.

Exercice 2. (5 points)

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de $P(z) = 0$.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.

   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm comme unité graphique. On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \qquad z_B = 1 - i \qquad z_J = i\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad z_K = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

1. Placer A, B, J et K sur une figure qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Soit D le point d'affixe $z_D = -1 + i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.

   (a) Déterminer une mesure, en radians, de l'angle de la rotation r.

   (b) Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.
5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

Exercice 3. (6 points)

Vrai ou Faux ?

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. Soit (a_n) une suite non constante de réels. Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

   Proposition 1 :

   On peut choisir la suite (a_n) telle que la suite (u_n) converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$.

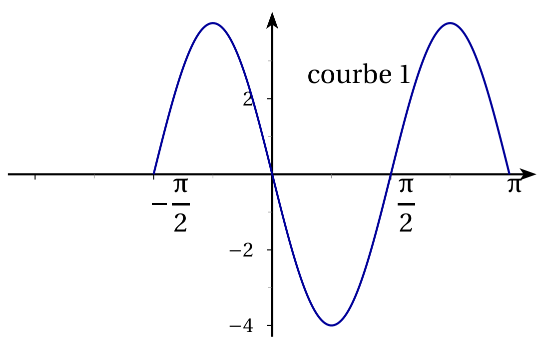
   Proposition 2 :

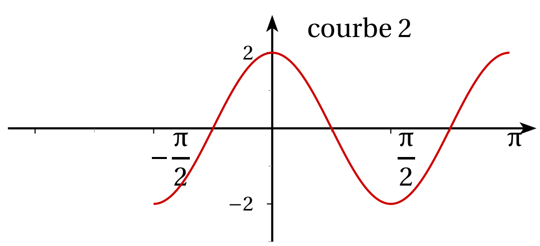
   Les points O, M_1 et M_{20} sont alignés.

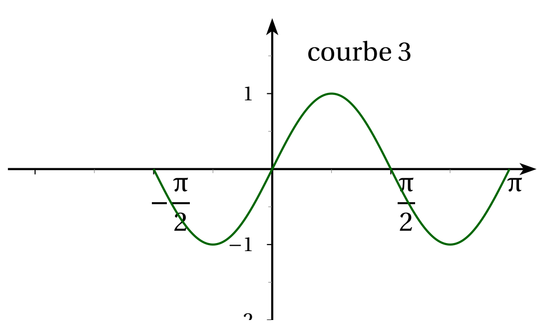
3. On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont donnés (dans le désordre) par les courbes ci-dessous :

   Proposition 3 :

   La courbe 3 ci-dessous est la représentation graphique de f.







4. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Variables
u et n sont des nombres entiers

Début
Entrer n
$u = n$
Tant que ($u > 7$) **Faire**
u prend la valeur $u - 7$
Fin Tant que
Afficher u
Fin

Proposition 4 :

L'algorithme affiche 11.

5. On considère dans un repère orthonormal de l'espace, le point A(0;0;3) et le plan $\mathscr{P} : 2x - y + z = 0$.

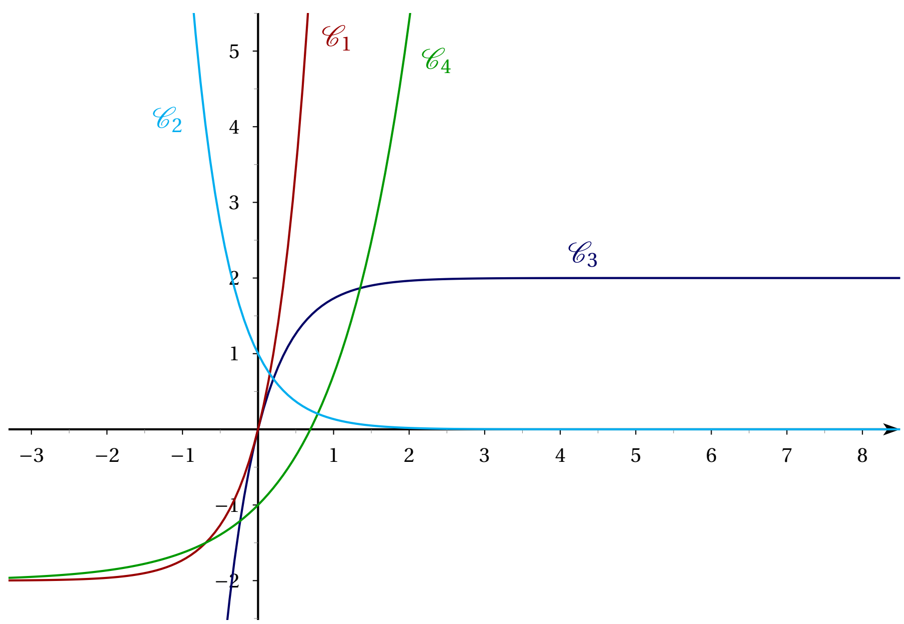
Proposition 5 :

La sphère de centre A et de rayon 2 et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

6. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution (E) vérifiant $y(0) = 0$.

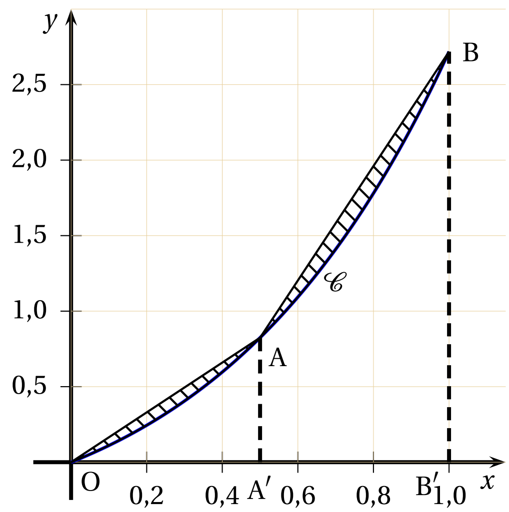
Proposition 6 :

La courbe représentative de la solution (E) vérifiant $y(0) = 0$ est la courbe $\mathscr{C}_4$.



Exercice 4. (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'une repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.
Soit la courbe $\mathscr{C}$, tracée ci-dessous, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$.
On a placé les points $A'(a;0)$ et $B'(1;0)$.



Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée ci-dessus est minimale.

Partie A :

1. Montrer que
$$\int_0^1 xe^x dx = 1$$
2. (a) Donner l'aire du triangle OAA′ et montrer que l'aire du trapèze ABB′A′ est égale à :
$$\frac{1}{2}\left(-a^2e^a + ae^a - ae + e\right)$$
(b) En déduire que l'aire de la partie hachurée est égale à :
$$\frac{1}{2}\left(ae^a - ae + e - 2\right)$$

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x(e^x - e) + e - 2$.

1. Soit g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0;+\infty[$.
Vérifier que la fonction g'' est définie sur $[0;+\infty[$ par $g''(x) = (2+x)e^x$.
2. En déduire les variations de g' sur $[0;+\infty[$.
3. Etablir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;+\infty[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale.
Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.