BACCALAUREAT GENERAL ROUGE

SESSION 2012

MATHEMATIQUES-NON SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : 4 **heures** . COEFFICIENT : **7**.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC ROUGE

Exercice 1. (4 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$$A(2;1;-1) \qquad B(-1;2;4) \qquad C(0;-2;3) \qquad D(1;1;-2)$$

et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-2y+z+1=0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots VRAI ou FAUX correspondant à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à* 0.

1. *Affirmation 1* : Les points A, B et C définissent un plan.
2. *Affirmation 2* : La droite (AC) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
3. *Affirmation 3* : Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x+8y-z-11=0$.
4. *Affirmation 4* : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2+3k \\ z = 3-4k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

5. *Affirmation 5* : Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
6. *Affirmation 6* : La distance du point C au plan $\mathscr{P}$ est égale à $4\sqrt{6}$.
7. *Affirmation 7* : La sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan $\mathscr{P}$.
8. *Affirmation 8* : Le point $E\left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 2. (5 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement : « le jeton tiré est blanc »et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'évènement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\mathrm{E}}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\mathrm{E})$.

Partie A :

1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$.

Partie B :

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- Chaque joueur paie 1€ par partie ;
- Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5€ ;
- Si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   (a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance E(X).
   (b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E}(\mathrm{X}) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n étant un entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Exercice 3. (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unités graphiques 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2i \qquad z_B = -\sqrt{3} + i \qquad z_C = \sqrt{3} + i$$

1. (a) Ecrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.
   (b) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   (c) Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.
2. (a) Ecrire le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.
3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.
   (a) Montrer que le point O', image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3} - i$.
   (b) Démontrer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.
   (c) Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
   (d) Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.
4. (a) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + i\right|.$$

   (b) Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

Exercice 4. (6 points)

L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x$$

   (a) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.*
   Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1\,;\,+\infty[$ une unique solution notée α.

   (b) Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

   (c) On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: a, b, c, e sont des nombres réels
Saisir des valeurs pour a, b et e
Si ($g(a) \times g(b) \geq 0$) **Alors**
    Afficher "pas de solution "
Sinon
    Tant que ($|b - a| \geq e$) **Faire**
        $c := \dfrac{a+b}{2}$
        Si ($g(a) \times g(c) \leq 0$) **Alors**
            $b := c$
        Sinon
            $a := c$
        Fin Si
    Fin Tant que
    Afficher a et b
Fin Si

   i. Qu'affiche cet algorithme dans chacun des cas suivants :

   Cas 1 : $a = 3$, $b = 6$ et $e = 0,01$ **Cas 2** : $a = 1$, $b = 4$ et $e = 1$.

   ii. Que réalise cet algorithme ?

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.
On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

   (a) En utilisant la courbe (Γ) ,construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x (t-1)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

   (a) Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$,

$$\mathrm{F}(x) = -x\mathrm{e}^{1-x} + 1$$

   (c) Démontrer que sur $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie $\mathscr{D}_a$ du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

   Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de $\mathscr{D}_a$, soit égale à $\dfrac{1}{2}$ et hachurer $\mathscr{D}_a$ sur le graphique.

ANNEXE - Exercice 4

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve