BACCALAUREAT GENERAL BLEU

SESSION 2012

MATHEMATIQUES-NON SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7**.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC BLEU

Exercice 1. (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives : $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ -6\ ;\ -1)$ et $C(2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

1. (a) Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x-y+z-4=0$.

   (a) Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

   (b) Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+t \\ y & = & -3+2t \\ z & = & t, \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}.$$

   (a) Montrer que le point I appartient à la droite D.

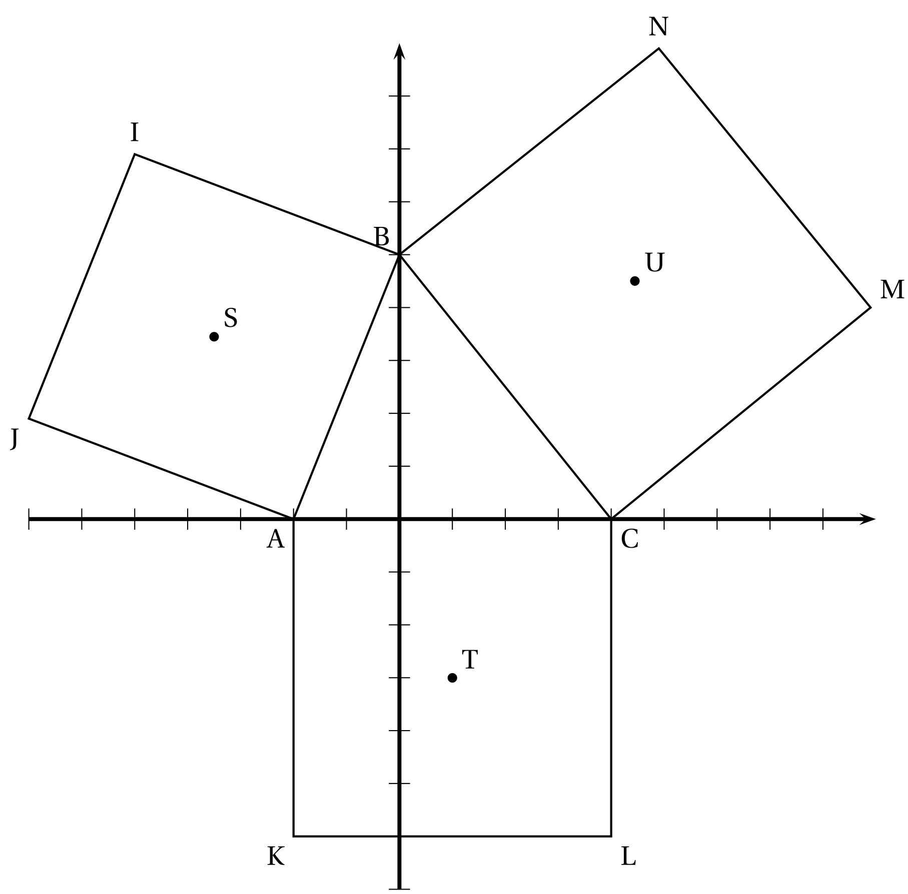
   (b) Montrer que le point I appartient à la sphère S.

   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

Exercice 2. (5 points)

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2$, $b = 5\text{i}$ et $c = 4$ ainsi que les carrés ABIJ, AKLC et BCMN, extérieurs au triangle ABC, de centres respectifs S, T et U.

1. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   En déduire que le point J a pour affixe $-7+2\text{i}$. On admettra que l'affixe du point K est - 2 - 6i.
2. Justifier que les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et que les segments [BK] et [JC] ont la même longueur. Calculer cette longueur.
3. (a) Calculer les affixes des points S et T.
   (b) Déterminer l'affixe du point U.
   (c) Démontrer que la droite (AU) est une hauteur du triangle STU.
4. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{JC}}, \overrightarrow{\text{AU}}\right)$.
5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe
   $v = -0,752+0,864\text{i}$.
   (a) Établir que les points A, V et U sont alignés.
   (b) Que représente la droite (AU) pour l'angle $\widehat{\text{BVC}}$?



Exercice 3. (5 points)

On considère la fonction f définie $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln x - 1.$$

Partie A : Étude d'une fonction

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.
4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0\,;\,+\infty[$.
5. Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

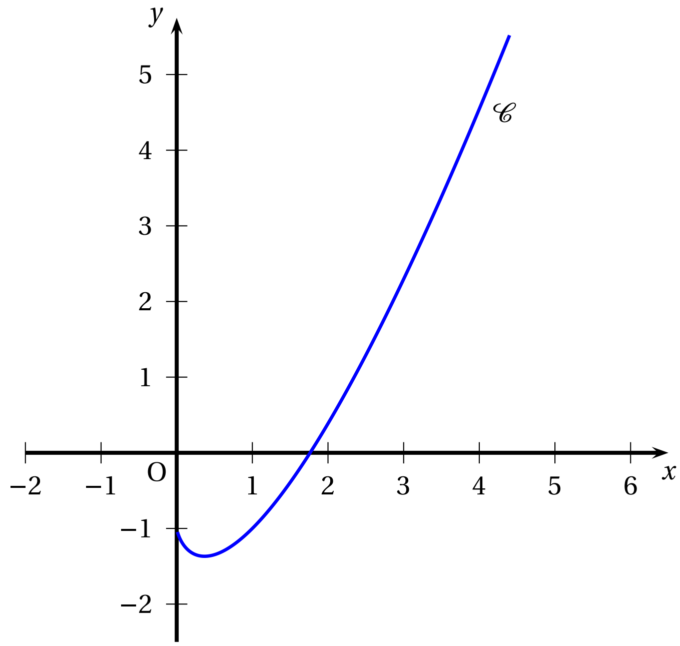
On donne la courbe $\mathscr{C}$, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_{\alpha}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_{\alpha}^{4} x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

3. Montrer l'égalité : $\mathrm{I} = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.
   En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.



Exercice 4. (5 points)

Soit u la suite (dite suite de Fibonnacci) définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Variables
k, u, v et w sont des nombres entiers
n est un entier supérieur ou égal à 2.
Début
Entrer n
$u = 0$
$v = 1$
Pour $k = 1$ **à** $n - 1$ **Faire**
w prend la valeur $u + v$
u prend la valeur v
v prend la valeur w
Fin Pour
Afficher w
Fin

   (a) Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre $n = 4$? et $n = 5$?
   (b) Que calcule cet algorithme ?

3. On note S_n la somme :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

   (a) Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = u_{n+2} - 1$$

   (c) Ecrire un algorithme, qui lorsque l'utilisateur saisit la valeur d'un entier n supérieur ou égal à 2, affiche la somme S_n.