BACCALAUREAT GENERAL BLANC

SESSION 2012

MATHEMATIQUES-NON SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7**.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

BAC BLANC

Exercice 1. (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ,on considère les points :

$$A(3\ ;\ 1\ ;\ -5) \qquad B(0\ ;\ 4\ ;\ -5) \qquad C(-1\ ;\ 2\ ;\ -5) \qquad \text{et} \qquad D(2\ ;\ 3\ ;\ 4)$$

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » *ou* « FAUX ». *On attribue* 0,5 *point par réponse correcte et on retranche* 0,25 *point par réponse incorrecte.*
L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est : $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \dfrac{7}{2} + k, \ k \in \mathbb{R} \\ z = -\dfrac{1}{2} - 9k \end{cases}$

Exercice 2. (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\dfrac{\pi}{2}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\dfrac{z-4}{z} = \text{i}$. Écrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A$'$ et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

   $$a = 2, \qquad b = 4, \qquad a' = 2\text{i} \quad \text{et} \quad d = 2 + 2\text{i}.$$

   Quelle est la nature du triangle ODB ?
4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - \text{i}\sqrt{3}$ et $f = 1 + \text{i}\sqrt{3}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?
5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A$'$ et de rayon 2.
   Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$
   (a) On désigne par E$'$ l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E$'$.
   (b) Démontrer que le point E$'$ est un point du cercle $\mathscr{C}'$.
   (c) Vérifier que : $e - d = \left(\sqrt{3} + 2\right)\left(e' - d\right)$. En déduire que les points E, E$'$ et D sont alignés.
6. Soit D$'$ l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE$'$D$'$ est rectangle.

Exercice 3. (7 points)

1. **Restitution organisée de connaissances.**

   L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
   On suppose connu le résultat suivant :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad e^x \geq x$$

   (a) On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$. (On étudiera la fonction g pour cela).

   (b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

2. On appelle f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
   On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   La courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.

   (a) Montrer que f est positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathscr{C}$.

   (c) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

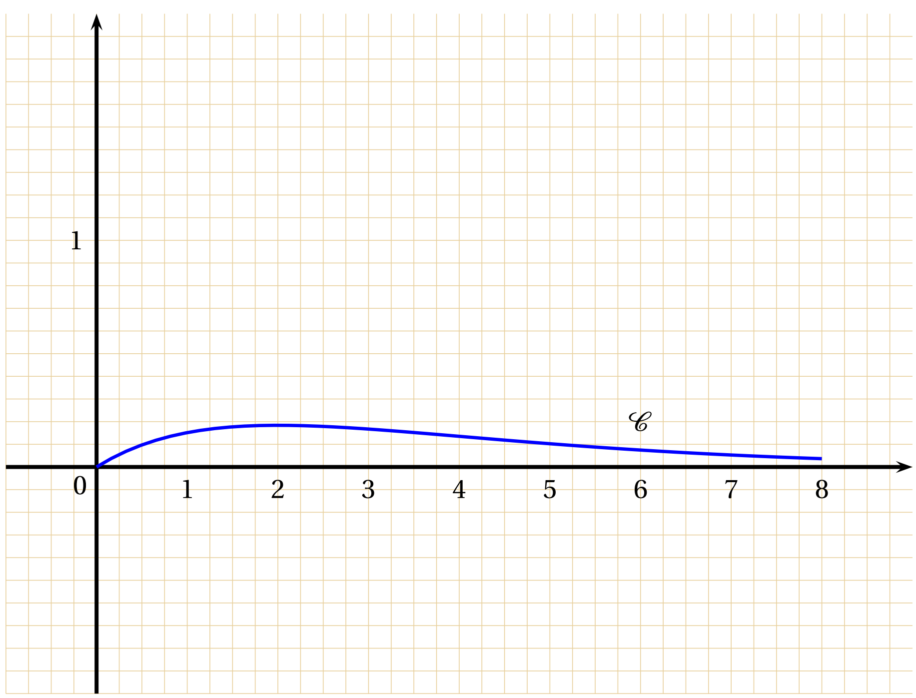
   (a) Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (b) Montrer que $\mathrm{F}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

   (c) Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (d) Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $\mathrm{F}(\alpha) = 0{,}5$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.
   Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\mathrm{A}_n \geqslant 0{,}5$.



Exercice 4. (5 points)

1. Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$
   (a) Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
   (b) Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel $n,\ u_n = w_n$.
2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   On considère l'algorithme donné suivant :

Algorithme 1 :

Variables
n, k et s sont des nombres réels

Début
Entrer n
$s = 0$
Pour $k = 1$ **à** n **Faire**
  s prend la valeur $s + \ln\left(\dfrac{k}{k+1}\right)$
  k prend la valeur $k+1$
Fin Pour
Afficher s
Fin

   (a) Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur entre $n = 3$? Même question si l'utilisateur entre $n = 5$?
   (b) Que calcule cet algorithme ?
3. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

   (a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.
   (b) Exprimer $S_n$en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.