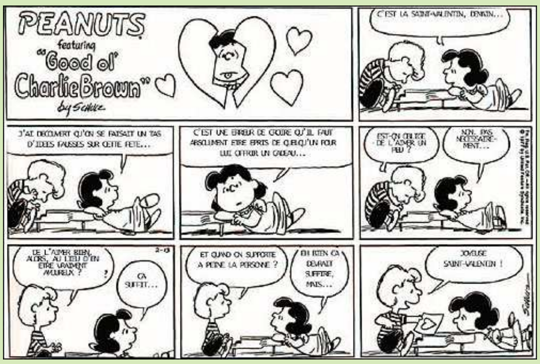
Chapitre 5

Fonctions Exponentielle

Hors Sujet



Titre : « Peanuts »
Auteur : Charles Schulz
Présentation succinte de l'auteur : Peanuts (aussi connu sous le nom de Snoopy et les Peanuts ou simplement Snoopy) est le nom d'un comic strip écrit et dessiné quotidiennement, sans interruption et sans assistance par l'Américain Charles M. Schulz (1922 - 2000) d'octobre 19501 jusqu'à sa mort, en février 2000. Il aura écrit au total 17 897 strips dont 2 506 éditions du dimanche2. Peanuts est une série de gags qui tournent autour de deux personnages centraux, un garçon maladroit, malchanceux et déprimé, Charlie Brown et son chien, Snoopy. Le strip s'appuie sur le principe du running gag (comique de répétition) où les mêmes situations entre les personnages reviennent tout au long de la bande dessinée. De plus, chacun des personnages a ses particularités, ses obsessions et ses accessoires propres, qui resurgissent chaque fois qu'ils apparaissent. Peanuts a donné également naissance à des dessins animés, dont plusieurs ont reçu un Emmy Award, à des pièces de théâtres et à des comédies musicales. Le comic a été, à partir des années 1960 un succès planétaire, notamment aux États-Unis. La popularité du strip et le nombre colossal de licences pour des publicités ou produits dérivés ont fait de Charles M. Schulz une des célébrités les plus riches du monde 3. À la mort de Schulz, le comic était publié dans plus de 2 600 journaux, dans 75 pays différents et dans 21 langues 4.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler

Résumé

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une fonction f qui est proportionnelle à sa dérivée f'. (Par exemple, le phénomène de désintégration de noyaux radioactifs)
Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.
Plus particulièrement, que peut-on dire d'une fonction qui serait égale à sa dérivée ?
Remarque : Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle ! Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

1. *L'importance d'une condition initiale*
   Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

   $$f' = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$. Démontrer que :

   $$g' = g \text{ sur } \mathbb{R}$$

   (b) Soit g une fonction vérifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $f + g$ vérifie la même condition.

   (c) Supposons maintenant qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :

   $$(P)\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   i. On considère la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$c(x) = f(x)f(-x)$$

   Montrer que c est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   ii. Démontrer que si g est une fonction qui vérifie (P) alors $g = f$ [1]

Remarque : Dans cette partie on vient de démontrer que s'il existe une solution alors il en existe une infinité, puis en imposant une condition initiale (ici $f(0) = 1$) s'il existe une solution à notre équation alors elle est unique.

Dans la suite, la fonction f est l'unique solution [2] satisfaisant la condition (P) i.e :

$$(P)\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Nous allons maintenant essayer de tracer la représentation graphique de f grâce à la méthode d'Euler.

1. On pourra considérer et dériver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \dfrac{g}{f}$
2. On suppose pour le moment qu'une telle fonction existe. La preuve rigoureuse de cette existence sera faite ultérieurement.

2. *Vers la représentation graphique*
On rappelle que si f est dérivable en a, alors pour des valeurs de h proche de 0 on a :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Il s'agit d'une approximation affine de f, la méthode d'Euler repose sur cette approximation.

(a) En utilisant les conditions satisfaites par f, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

(b) On note (u_n) la suite définie, sur $\mathbb{N}$, par :

$$u_n = (1+h)^n f(a)$$

Démontrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

(c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$. On a donc :

$$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

i. On pose $x = nh$. Démontrer que pour n assez grand :

$$f(x) \simeq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Remarque : C'est cette suite $(u_n(x))$ définie par :

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

que nous utiliserons pour montrer rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle.

ii. A l'aide de la calculatrice (ou d'un tableur), tracer les courbes des approximations de la fonction f pour des valeurs de n égales à 10, 100 et 1000.

iii. En prenant $n = 1000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Remarque : Le nombre $f(1)$ est encore noté e. On a déjà vu que

$$e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

Ici voici une nouvelle définition du nombre e :

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Conclusion : Cette fonction f vérifiant les conditions

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

est appelée **fontion exponentielle**.
On vient de voir à quoi ressemble sa représentation graphique. nous verrons, dans le cours, que cette fonction possède des propriétés remarquables notamment celle de transformer des « somme » en « produits », i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

Problem 1. *Essayer de le montrer en fixant $y \in \mathbb{R}$ et en considérant la fonction g_y définie par :*

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

Pour cela montrer que g_y est une fonction constante (égale à $f(y)$) sur $\mathbb{R}$.