Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

Interrogation n°12

<u>Exercice</u> 1. (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = \ln x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.
On cherche à résoudre l'équation (E) : $\ln x = x$.

1. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
2. Démontrer que, pour tout $\in \mathbb{R}^{+*}$, on a :
$$\ln x \leq x - 1$$
En déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.
3. En déduire que l'équation (E) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.

<u>Exercice</u> 2. (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3. En déduire les variations de la fonction f.

Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

Interrogation n°12

<u>Exercice</u> 1. (10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + x)}{x}$$

But : On se propose de déterminer la limite en $+\infty$ et la limite en 0^+ de f.

Partie A : La limite de f en $+\infty$

1. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :
$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}$$
2. En déduire que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :
$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Partie B : La limite de f en 0^+

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x) = \ln(x+1) - x$.

1. Calculer la limite de h en 0^+.
2. Etudier les variations de la fonction h. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:
$$\ln(x+1) \leq x$$
3. Démontrer que, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$:
$$0 \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq 1$$
4. En utilisant le fait que $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(x+1)}{x}$, démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a :
$$\frac{\ln x}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{\ln x}{x}$$
Conclure.