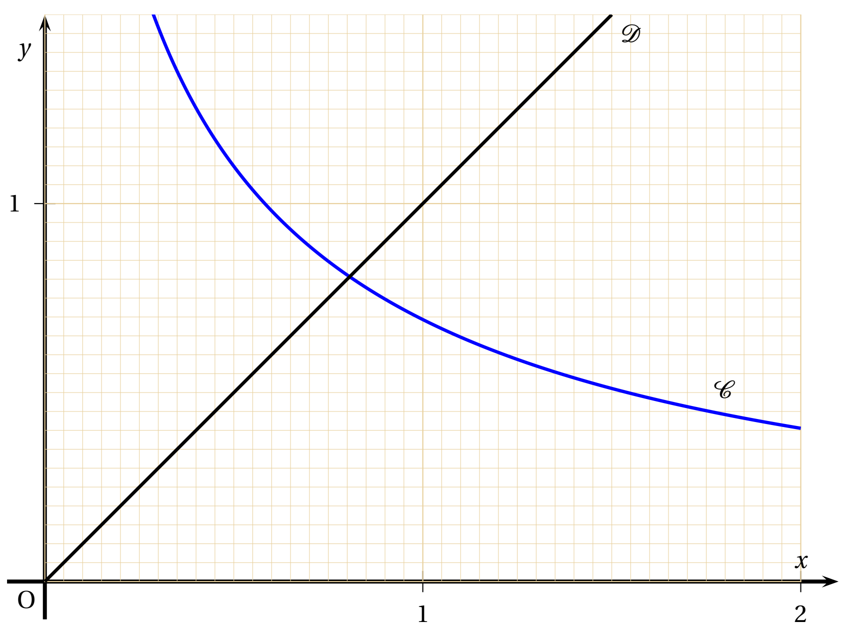
DS 6 : Nombres Complexes et Logarithme Népérien

Exercice 1. (10 points)

1. Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :
$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x.$$
   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0~;~+\infty[$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0~;~+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.
   On a représenté la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.
   (a) Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?
   On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON.
   Aucune justification n'est demandée.
   - Conjecture 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
   - Conjecture 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0,5. »
   - Conjecture 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

   (c) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.
   Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right) = \ell$.
   (d) Montrer que $\ell = \alpha$.



Exercice 2. (10 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_B = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_A.
2. (a) Écrire $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.
   (b) Montrer que $\dfrac{z_B}{z_A} = \left(1 + \sqrt{3}\right) e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (c) En déduire la forme exponentielle de z_B.
3. On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.
   (a) Déterminer l'affixe du point B_1.
   (b) En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $\left(O ; \vec{u}\right)$.
4. Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $\left(O ; \vec{u}\right)$.
   On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.
   (a) Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).
   (b) Soit M un point distinct du point O.
   Son affixe z est égale à $\rho e^{\mathrm{i}\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.
   Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).
   (c) Déterminer l'ensemble (E).