DS 5 : Nombres Complexes

Exercice 1. (10 points)

Pour tout nombre complexe z, on définit :

$$P(z) = z^3 - 4(\sqrt{2}+1)z^2 + 16(\sqrt{2}+1)z - 64$$

1. Calculer $P(4)$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
4. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité graphique : 1 cm).
On note A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$, $z_C = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ et $z_D = -2 + 2i\sqrt{3}$.
   (a) Calculer le module de z_A, z_B, z_C et z_D. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
   (b) Déterminer l'argument des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D. Donner la forme trigonométrique puis la forme exponentielle des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
   (c) Placer sur un graphique les points A, B, C et D à l'aide de la règle (non graduée) et du compas, en respectant l'unité imposé par l'énoncé.
   (d) On note I le milieu de [AB] et z_I son affixe.
      i. Déterminer la forme algébrique de z_I, puis le module de z_I.
      ii. Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire l'argument de z_I.
      iii. Donner la forme trigonométrique de z_I.
      iv. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de :
$$\cos\frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8}$$
5. On note E et F les points d'affixes respectives $z_E = z_B \times z_C$. et $z_F = \dfrac{z_D}{z_I}$
   (a) Déterminer la forme algébrique de z_E et z_F.
   (b) Déterminer la forme trigonométrique de z_E et z_F.
   (c) **[Bonus]** Donner les valeurs exactes de :
$$\cos\frac{13\pi}{24} \quad \text{et} \quad \sin\frac{13\pi}{24}$$

Exercice 2. (4 points)

Déterminer et représenter dans chaque cas l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

1. $M \in \mathscr{C} \iff |z-5| = |z-1-3i|$
2. $M \in \mathscr{F} \iff |\overline{z}| = |z-i|$
3. $M \in \mathscr{G} \iff arg(z-1) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$
4. $M \in \mathscr{K} \iff |\overline{z} - 4 - i| = 4$

Exercice 3. (6 points)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x(1-x)+1$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. **Limites et Asymptotes**
   (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   (b) Déteminer la limite de g en $-\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ que l'on précisera.
2. **Dérivée, Variation et signe de g**
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $$g'(x) = -xe^x$$
   (b) Dresser le tableau des variations (en justifiant) de la fonction g, préciser les extremums de g.
   (c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α
   (d) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à 10^{-2} près de α.
   (e) Démontrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$.
   (f) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. **Tangente et représentation graphique**
   (a) Déterminer l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.
   (c) Montrer que $\mathscr{C}_g$ est au dessous de T_1 pour tout $x \neq 1$.
   (d) Tracer dans un repère les droites $\mathscr{D}$, T_0, T_1 et la courbe $\mathscr{C}_g$.

Partie II (éventuellement bonus)

Soit A la fonction dénie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$A(x) = \frac{4x}{e^x+1}$$

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction dénie dans la partie I.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les limites de A en $+\infty$ et en $-\infty$.