DS 4 : EXPONENTIELLE

Exercice 1. R.O.C (2 points)

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
2. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante. (On montrera $h' = 0$)
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

Exercice 2. (9 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repére orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   (c) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

   (b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. (a) Que peut-on dire de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?
   (b) En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$.
4. (a) Montrer que la tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + 1$.
   (b) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 3]$.
   On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f"(x) = \frac{12e^x\,(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}.$$

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
   Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.

Exercice 3. (9 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}') : y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_k(x) = (x+k)\mathrm{e}^{-x}$$

où k est un nombre réel donné.

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.
2. On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.
3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$;
   - la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y = (x+k)\mathrm{e}^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

   (a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

   (b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

(**à rendre avec la copie**)