DS 3 : Continuité-TVI-Dérivabilité

Exercice 1. (6 points)

On se propose de déterminer le nombre de racine(s) du polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

1. Déterminer P' puis P''.
2. Dresser le tableau de signe de P'', puis en déduire le tableau de variation de P'.
3. Déterminer les limites de P' en $+\infty$ et en $-\infty$, en déduire que l'équation $P'(x) = 0$ admet exactement une solution α_1 dans $\mathbb{R}$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
4. En déduire le tableau de signe de P' puis le tableau de variation de P.
5. Calculer les limites de P en $+\infty$ et en $-\infty$, en déduire que $P(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
6. Conclure.
7. On considère le polynôme Q définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

   (a) Démontrer que $Q'(x) = P(x)$.

   (b) En déduire que l'équation $Q(x) = 0$ admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

Exercice 2. (3 points)

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f avec $a = 0$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$ si $a = 0$?
2. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
3. Déterminer a pour que f soit continue en 1.

Exercice 3. (6 points)

On considère la fonction f définie pour $x \neq -1$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 5}{x + 1}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. (a) Montrer qu'il existe 3 réels a, b et c tels que, pour $x \neq -1$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

   (b) En déduire l'existence d'une asymptote oblique T dont on donnera l'équation.

   (c) Etudier la position de T et $\mathscr{C}_f$.
4. Déterminer la limite de f en -1^+ et en -1^-.
5. Démontrer que l'équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = -3x + 5$.

Exercice 4. (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$$

On souhaite résoudre l'équation (E) : $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

1. Où l'on montre que les solutions de (E) sont dans l'intervalle $[-2;2]$.
   (a) Montrer que si $x > 2$ alors $-\dfrac{x}{2} < -1$. En déduire que $f(x) \neq 0$ lorsque $x > 2$.
   (b) Montrer que si $x < -2$ alors $-\dfrac{x}{2} > 1$ et en déduire de nouveau que $f(x) \neq 0$ pour $x < -2$.
   (c) En déduire que toutes les solutions de l'équation (E) se trouvent dans l'intervalle $[-2;2]$.
2. Où l'on étudie la fonction f.
   (a) Résoudre, à l'aide d'un cercle trigonométrique, l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi;\pi]$.
   (b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in -\pi;\pi]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de f pour $x \in [-\pi;\pi]$.
3. Où l'on conclut.
   (a) Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).
   (b) Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.

Exercice 5. (Bonus)

Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x + x$.
En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.