DS 2 : Le produit scalaire

Exercice 1. R.O.C (2 points)

1. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon r, démontrer que $\mathscr{S}$ admet une équation de la forme :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

2. Déterminer l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre [AB] avec A(0;0;1) et B(1;2;3). Préciser son centre Ω et son rayon r.

Exercice 2. (10 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
On considère les points $A(-2\,;\,0\,;\,1)$, $B(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $C(-2\,;\,2\,;\,2)$.

1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
   (b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
   (c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x-y+2z+2=0$.
3. Soient $\mathscr{P}_1$, et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $x+y-3z+3=0$ et $x-2y+6z=0$.
   Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2 \\ y &=& -1+3t \\ z &=& t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\,;\,-3\,;\,1)$ et de rayon $r=3$.
   (a) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.
   Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
   (b) Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
   (c) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathscr{S}$.

Exercice 3. (10 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3\,;\,-4\,;\,1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1\,;\,-3\,;\,1)$.
On considère la droite D$'$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1-t \\ y &=& 2+t \\ z &=& 1-t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D$'$. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D$'$, distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H$'$ le point d'intersection des droites D$'$ et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D$'$ sont sécants en H$'$. Une figure est donnée ci-dessous.

1. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1\,;\,0\,;\,-1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est une vecteur directeur de la droite Δ.

2. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 2\ ;\ 3)$.
   (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan P.
   (b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+2y+3z-4=0$.
3. (a) Démontrer que le point H' a pour coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.
   (b) En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.
4. (a) Déterminer les coordonnées du point H.
   (b) Calculer la longueur HH'.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D', $\mathrm{MM}' \geqslant \mathrm{HH}'$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}$.
   (b) En déduire que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right\|^2 \geqslant \left\|\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\right\|^2$ et conclure.

   La longueur HH' *réalise donc le minimum des distances entre une point de* D *et une point de* D'. *On l'appelle distance entre les droites* D *et* D'.

Figure exercice 3