DM 8 : Exponentielle et équation différentielle

Exercice 1. A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heure), on injecte dans le sang, par piqûre intravéineuse, une dose de $1,8$ unité d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.
On admet que le processus d'élimination peut se présenter mathématiquement par l'équation différentielle :

$$Q'(t) = -\lambda Q(t)$$

où λ est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Montrer qu'on a $Q(t) = 1,8e^{-\lambda t}$.
   Calculer la valeur de λ, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%.
   On donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.
2. Etudier le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, déterminer sa limite en $+\infty$, et tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de Q dans le plan $\mathscr{P}$.
3. Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?
   On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près (on ne demande pas la conversion en heures, minutes et secondes).
4. On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant $t = 1$ (au bout d'une heure donc), puis aux instants $t = 2$, $t = 3$, etc.
   On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t = n$, dès que la nouvelle injection est faite.
   (a) Montrer que $R_1 = 1,8 + 0,7 \times 1,8$
   (b) Montrer que $R_2 = 1,8 + 0,7R_1$ et calculer R_2.
   (c) Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.
   (d) Montrer que, pour tout entier n, on a :
   $$R_n = 6(1 - 0,7^{n+1})$$
   (e) Déterminer la limite de R_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

1. Etudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter géométriquement.
2. Etudier, lorsque x tend vers $-\infty$, les limites de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ (on précisera la tangente au point d'abscisse 0).

Exercice 3. La fonction suivante permet de modéliser des phénomènes aléatoires se produisant en moyenne trois fois par unité de temps (loi « gamma trois ») :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} \qquad x \geq 0$$

Etudier la fonction f sur $[0; +\infty[$ (limite en $+\infty$, dérivée et sens de variation)