DM 7 : Théorème des valeurs intermédiaires - Etude de fonctions

Exercice 1. On se propose de déterminer le nombre de racine(s) du polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

1. Déterminer P' puis P''.
2. Dresser le tableau de signe de P'', puis en déduire le tableau de variation de P'.
3. Déterminer les limites de P' en $+\infty$ et en $-\infty$, en déduire que l'équation $P'(x) = 0$ admet exactement une solution α_1 dans $\mathbb{R}$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
4. En déduire le tableau de signe de P' puis le tableau de variation de P.
5. Calculer les limites de P en $+\infty$ et en $-\infty$, en déduire que $P(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
6. Conclure.
7. On considère le polynôme Q définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

   (a) Démontrer que $Q'(x) = P(x)$.
   (b) En déduire que l'équation $Q(x) = 0$ admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
   (a) Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}. [1]
   (b) Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. (a) Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.
3. (a) Montrez qu'il existe quatre réels a, b, c, et d tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

   (b) Déduisez en que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ et étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
   Vérifiez en particulier que $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un unique point Δ.
4. Déterminez les abscisses des point B et B′ de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à Δ. [2]
5. (a) Vérifiez que $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha}{2}$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$. [3]
   (b) Tracez Δ, $\mathscr{C}$ ainsi que les points A, B, B′ et M, N, P d'abscisses respectives 1, 2 et −1, sans oublier les six tangentes en ces points.

1. emploi classique du théorème de la bijection.
2. deux droites parallèles ont le même coefficient directeur...
3. utilisez le fait que $g(\alpha) = 0$.