DM 3 : L'algorithme de Babylone - Approximation de $\sqrt{2}$

1. On considère la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

   (a) Etudier le sens de variation de f.

   (b) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$, et montrer que la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ.

   (c) Représenter graphiquement $\mathscr{C}_f$ et Δ. Préciser les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation $y = x$ (que l'on tracera).

2. On définit une suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

   (a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) sur le dessin de la question 1)(c).

   (b) Conjecturer alors le comportement de (u_n) : sens de variation et limite.

3. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 sous forme fractionnaire.

   (b) Vérifier, à l'aide de la calculatrice, les inégalités :

$$u_0 < \sqrt{2} < u_4 < u_3 < u_2 < u_1$$

   (c) Montrer par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$ pour $n \geq 1$:

$$\mathscr{P}(n) : \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$

   En déduire le sens de variation de (u_n), ainsi que la convergence de (u_n).

4. **Seul les élèves curieux, motivé et à l'aise avec les suites tenteront de traiter cette question.**

   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - \sqrt{2})^2$$

   (b) Vérifier que

$$\left|u_0 - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}$$

   En déduire par récurrence que, pour tout $n \geq 0$:

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$$

   (c) Prouver que, pour tout $n \geq 0$, $2^{n+1} - 1 \geq n + 1$.
   En déduire la limite de (u_n).

   (d) A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que :

$$(0,5)^{2^{n+1}-1} < 10^{-100}$$

   En déduire que $u_8 \simeq \sqrt{2}$ à 10^{-100} près.