DM 1 : Raisonnement par récurrence

Exercice 1.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$ $n^3 - n$ est un multiple de 3.
2. (a) Développer, réduire et ordonner $(n+1)^5$.
   (b) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$, $n^5 - n$ est un multiple de 5.

Grand Homme et petit théorème

On doit à Pierre de Fermat (1601-1665), juriste de profession et mathématicien amateur, le résultat suivant : « Lorsque p est premier, $n^{\mathrm{P}} - n$ est un multiple de p »connu sous le nom de Petit théorème de Fermat. L'exercice précédent aide à démontrer ce résultat pour $p = 3$ et $p = 5$, une généralisation est au programme de l'enseignement de spécialité.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et par la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$.

1. Montrer par récurrence que :
   (a) lorsque $u_0 \in [0;4]$, on a, pour tout n, $0 \leq u_n \leq 5$.
   (b) lorsque $u_0 \in [5;10]$, on a, pour tout n, $4 \leq u_n \leq 10$.

DM 1 : Raisonnement par récurrence

Exercice 1.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$ $n^3 - n$ est un multiple de 3.
2. (a) Développer, réduire et ordonner $(n+1)^5$.
   (b) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$, $n^5 - n$ est un multiple de 5.

Grand Homme et petit théorème

On doit à Pierre de Fermat (1601-1665), juriste de profession et mathématicien amateur, le résultat suivant : « Lorsque p est premier, $n^{\mathrm{P}} - n$ est un multiple de p »connu sous le nom de Petit théorème de Fermat. L'exercice précédent aide à démontrer ce résultat pour $p = 3$ et $p = 5$, une généralisation est au programme de l'enseignement de spécialité.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et par la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$.

1. Montrer par récurrence que :
   (a) lorsque $u_0 \in [0;4]$, on a, pour tout n, $0 \leq u_n \leq 5$.
   (b) lorsque $u_0 \in [5;10]$, on a, pour tout n, $4 \leq u_n \leq 10$.