

DM 18 : PROBABILITÉS - DÉNOMBREMENT

Exercice 1. Le Poker

Une main au poker est constituée de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant des carrés (XXXXY) ? des fulls (XXXYY) ? des brelans (XXXYZ) ? des doubles paires (XXYYZ) ? des paires (XXYZA) ?

Deux lettres identiques (par exemple XX) correspondent à deux cartes de même hauteur (par exemple deux dames).

Réponse : 123552 doubles paires, 1098240 paires.

Réponse : 624 carrés, 3744 fulls, 54912 brelans

Exercice 2. Périclès, la grèce et l'ouzo !

Périclès est goutteur d'olives dans une usine grecque. Un matin, il goutte cent olives au hasard et les replace dans le réservoir.

L'après-midi, l'ouzo de l'apéritif lui a fait perdre la mémoire. Il goutte à nouveau cent olives dans le même réservoir. Douze d'entre elles avaient déjà été machées.

On note A l'événement « il y a douze olives machées parmi les cent choisies » et B_n l'événement « il y a n olives dans le réservoir ».

On considère la fonction f définie pour les entiers supérieurs à cent par

$$f(n) = P_{B_n}(A)$$

et la suite (u_n) définie pour les entiers supérieurs à 100 par

$$u_n = \frac{f(n+1)}{f(n)}$$

1. Comparez u_n à 1.

$$\text{Réponse : } u_n = \frac{\binom{100}{u} \binom{88}{69-u} \binom{12}{100} \binom{100}{u+1} \binom{88}{00} \binom{12}{100}}{\binom{100}{u} \binom{88}{69-u} \binom{12}{100} \binom{100}{u+1} \binom{88}{00} \binom{12}{100}}$$

2. Montrez que la fonction f atteint un maximum sur $[[100, +\infty[[$.
3. On appelle *maximum de vraisemblance* m la valeur de n correspondant à ce maximum. Déterminez m .

Réponse : $m = 833$

Exercice 3. Un problème d'âge

Le capitaine des pompiers de New-York réside à l'angle de la 7^{ème} rue et de la 33^{ème} avenue. La caserne se trouve à l'angle de la 15^{ème} rue et de la 40^{ème} avenue. Il s'y rend tous les jours à pied et sans perdre de temps (i.e. dans le sens des numéros croissants aussi bien pour les rues que pour les avenues). Sachant qu'il a commencé à travailler le jour de ses 18 ans, et sachant qu'il n'est jamais passé deux fois par le même chemin, quel est l'âge maximum du capitaine ?

Réponse : maximum 35 ans.