DM 13 : Nombre Complexe, partie géométrie

Partie I : On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer les propriétés suivantes :

   (a) $j = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $j^3 = 1$ (c) $1 + j + j^2 = 0$ (d) $-j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. Dans un repère orthonormé direct du plan, on considère les points M, N et P d'affixes respectives m, n et p.
   (a) En utilisant la rotation de centre N et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, démontrer que MNP est un triangle équilatéral de sens direct, si et seulement si, $m - n = -j^2(p - n)$
   (b) En déduire que MNP est un triangle équilatéral de sens direct, si et seulement si, $m + nj + pj^2 = 0$

Partie II : Application à un problème de géométrie.
On considère un cercle de centre O et des points A, B, C, D, E et F tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}\right) = \frac{\pi}{3}$$

M, N et P sont respectivement les milieux des segments [BC], [DE] et [FA].
Les affixes des points A, B, C, D, E, F, M, N et P sont notées respectivement a, b, c, d, e, f, m, n et p.

1. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c, d, e et f.
2. A l'aide de la partie I démontrer que MNP est un triangle équilatéral de sens direct.