DM 12 : Logarithme népérien (Limites et étude de fonction)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad g(0) = 0$$

Que doit-on prouver pour démontrer que g est continue en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$) ?
Objectif : Démontrer que la fonction g est continue en 0 de deux manières différentes.

1$^{\text{ère}}$ **méthode** : Etude de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ en utilisant le théorème des gendarmes.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$h(\mathrm{X}) = \ln(\mathrm{X}+1) - \mathrm{X}$$

1. Calculer $\lim\limits_{\mathrm{X}\to 0^+} h(\mathrm{X})$.
2. Etudier les variations de h, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}^+$.
3. En déduire que :
$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^+ \qquad \ln(\mathrm{X}+1) \leq \mathrm{X}$$
4. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq \ln(x^2+1) \leq x^2$$
5. Déduire de la question précédente :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$:
   $$0 \leq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \leq x$$
   En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}$:
   $$x \leq \frac{\ln(x^2+1)}{x} \leq 0$$
   En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$.
6. Conclure.

2$^{\text{ème}}$ **méthode** : Etude de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ en utilisant la définition du nombre dérivée.
On rappelle que si f est une fonction dérivable en a alors :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

1. Déterminer une fonction f et un réel a tel que :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$$
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$, puis conclure.