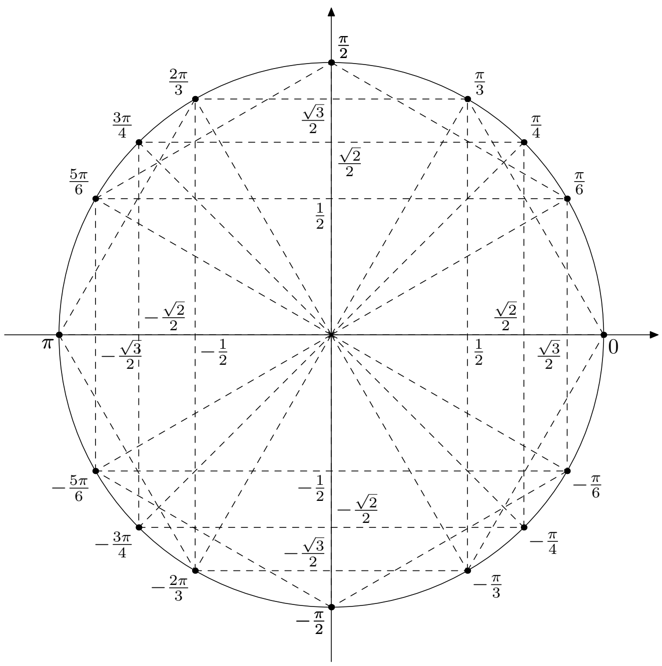
DM 10 : Nombres complexes



On utilise assez souvent les valeurs des cosinus et des sinus que l'on peut lire sur le cercle trigonométrique ci-contre :

Partie A : D'où viennent ces curieux résultats ?

1. Considérons un triangle ABC rectangle et isocèle en A avec AB = 1. Montrer que BC = $\sqrt{2}$.
2. A l'aide de la trigonométrie de collège, montrer que :

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Par symétrie ou en raisonnant de manière identique dans des triangles particuliers, on démontre aisément tous les autres résultats inscrit sur le cercle trigonométrique. Dans la suite de ce DM, on se demande comment trouver les cosinus et les sinus d'autres angles, moins particulier.

Partie B : Où l'on détermine le $\cos\frac{7\pi}{12}$ et le $\sin\frac{7\pi}{12}$.

1. Vérifier que $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$.
2. Dans un repère orthonormal on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{et} \qquad z_B = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   (a) Déterminer le module et un argument des deux nombres complexes z_A et z_B.
   (b) Déterminer une forme trigonométrique de z_A et z_B, puis une forme exponentielle.
   (c) Déterminer la forme algébrique de $z_C = z_A \times z_B$.
   (d) Déterminer le module et un argument de z_C, en déduire une écriture exponentielle de z_C.
   (e) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Partie C :

1. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe :

$$z_D = \frac{z_A}{z_B}$$

   puis en donner une écrire sous forme exponentielle.
2. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
3. En observant que $\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}$, démontrer que :

$$\cos\frac{-\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{-\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$