Devoir Maison 2

Exercice 1. *Résoudre un problème* (4 points)
Pour noël, un patissier compte fabriquer 50 choux à la crème et 70 éclairs au chocolat. Pour les commercialiser, il a l'intention de les présenter en lots, qui comporteront tous le même nombre de choux et d'éclairs. Pour des raisons esthétiques, il s'interdit de proposer à la vente des lots obtenus en partageant un choux ou un éclair.
On appelle N le nombre de lots de composition identique qu'il peut ainsi réaliser.

1. Justifier le fait que N est un diviseur de 50 et 70.
2. Le commercant souhaite vendre le plus grand nombre possible de lots. Montrer que $N = 10$ est le nombre maximal de lots que le commerçant peut fabriquer.

Exercice 2. *Un nouvel ensemble stable pour les 4 opérations* (6 points)
On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ un nouvel ensemble définie par :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \text{ tel que } a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q}\}$$

1. Choisir deux nombres u et v de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ de la forme $a + b\sqrt{2}$ qui ne soit pas des nombres décimaux.
2. Calculer la valeur exacte de $u + v$, de $u - v$, de $u \times v$ et de $\dfrac{u}{v}$
3. Expliquer pourquoi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$

Exercice 3. *On connait la somme et le produit* (4 points)
Un rectangle a pour périmètre $P = 14$ m et pour aire $\mathscr{A} = 12$ m^2.
Le but du problème est de déterminer les dimensions du rectangle. Pour cela, notons x et y les dimensions de ce rectangle.

1. Montrer que $y = 7 - x$.
2. En déduire que $x^2 - 7x + 12 = 0$
3. Montrer que $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$
4. Conclure.

Exercice 4. *Un peu d'arithmétique* (6 points)
On considère un nombre $A = 4n + 2$ où n désigne un entier naturel.

1. Calculer A pour $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$; $n = 7$.
2. Montrer que A est pair.
3. Montrer que A n'est pas un multiple de 4.
4. Soit k un nombre entier.
   (a) Montrer que si k est pair alors k^2 est un multiple de 4.
   (b) Montrer que si k est impair alors k^2 est impair.
   (c) Montrer que A n'est le carré d'aucun nombre entier (i.e montrer que $4n+2 \neq k^2$ quelque soit l'entier k).

Exercice 5. *Défi* (3 points)
On considère un nombre premier $p > 3$. Montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 12