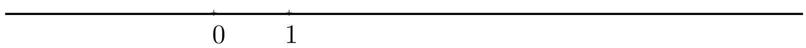
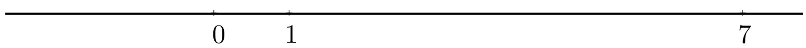
Leçon 1

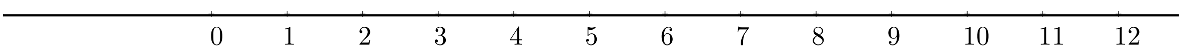
Nombres réels et intervalles

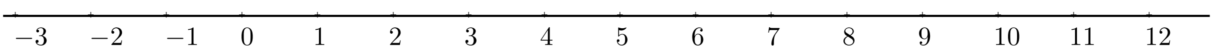
Résumé

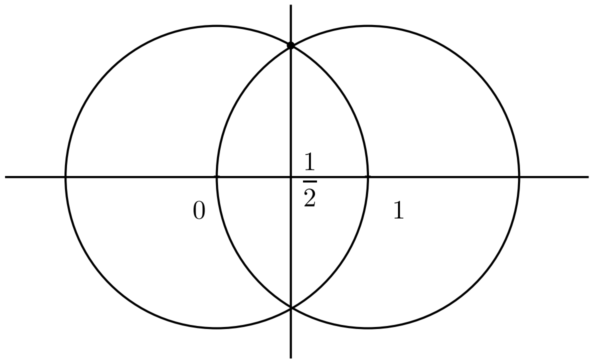
Euclide a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné. La géométrie euclidienne est donc la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas. L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être construit, ou "obtenu", à l'aide de ces deux instruments.
Cette conjecture (erronée) va remettre en question la définition d'un nombre : les nombres rationnels (les fractions) ne suffisent pas à exprimer toutes les longueurs puisque la diagonale d'un carré de côté 1 est constructible, mais correspond au nombre $\sqrt{2}$ dont on peut démontrer qu'il ne peut pas s'écrire comme le rapport de deux entiers i.e qu'il n'est pas rationnel et pourtant on peut le construire à l'aide d'une règle et d'un compas. On doit à Hippase de Métaponte la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, cette découverte choqua tellement la grèce antique qu'on raconte qu'il fut jeter à la mer. En effet les nombres, comme le monde, ne pouvait être que rationnels !
Pire on découvrira plus tard que certains nombres ne peuvent pas être obtenus à l'aide d'une règle et d'un compas, c'est la cas de π.



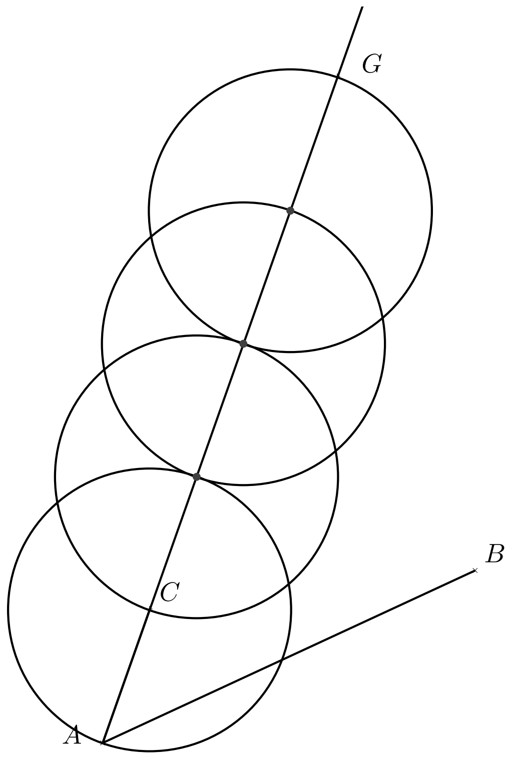




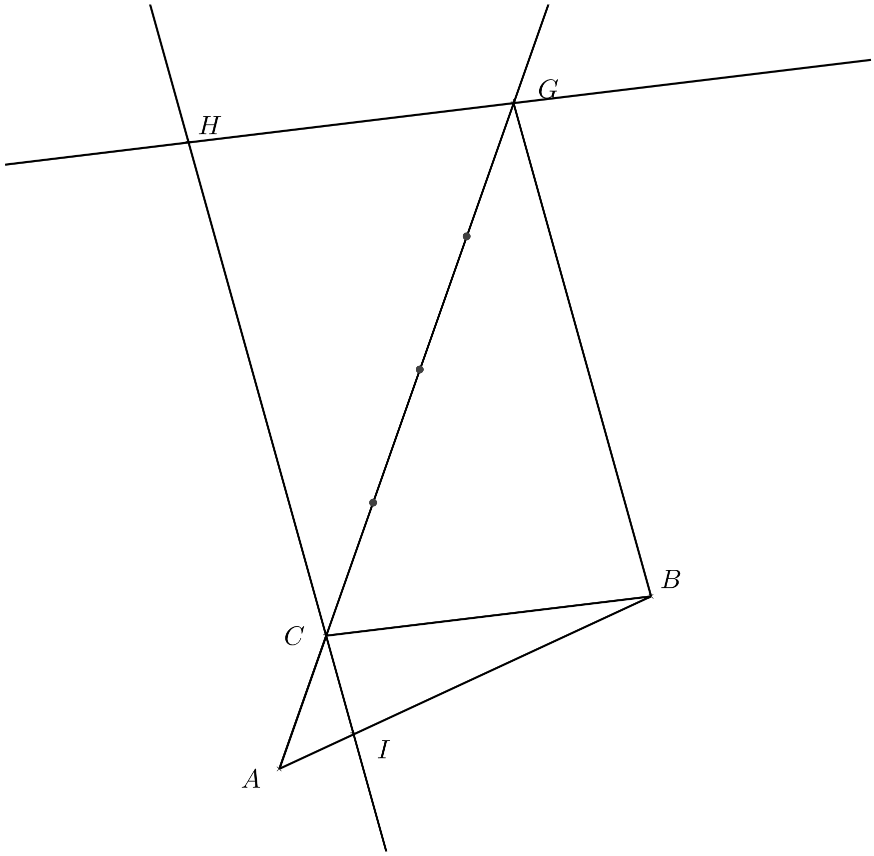


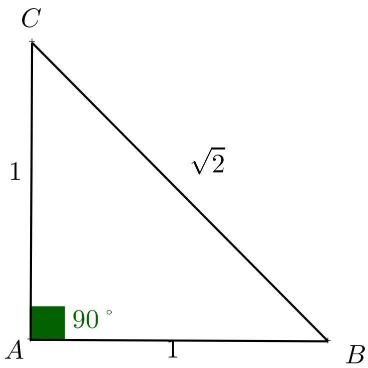


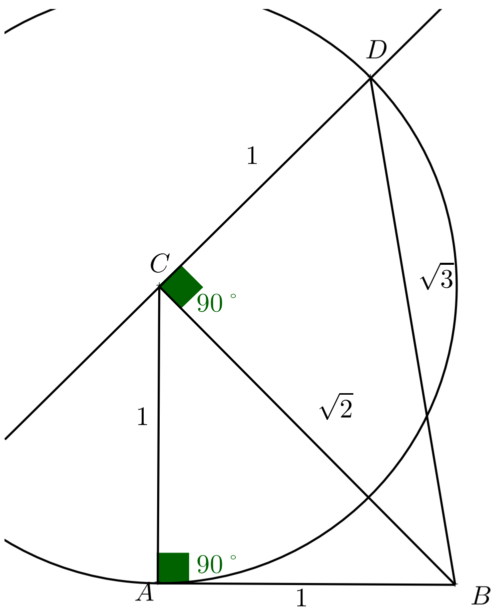
$\frac{1}{2}$
0
1

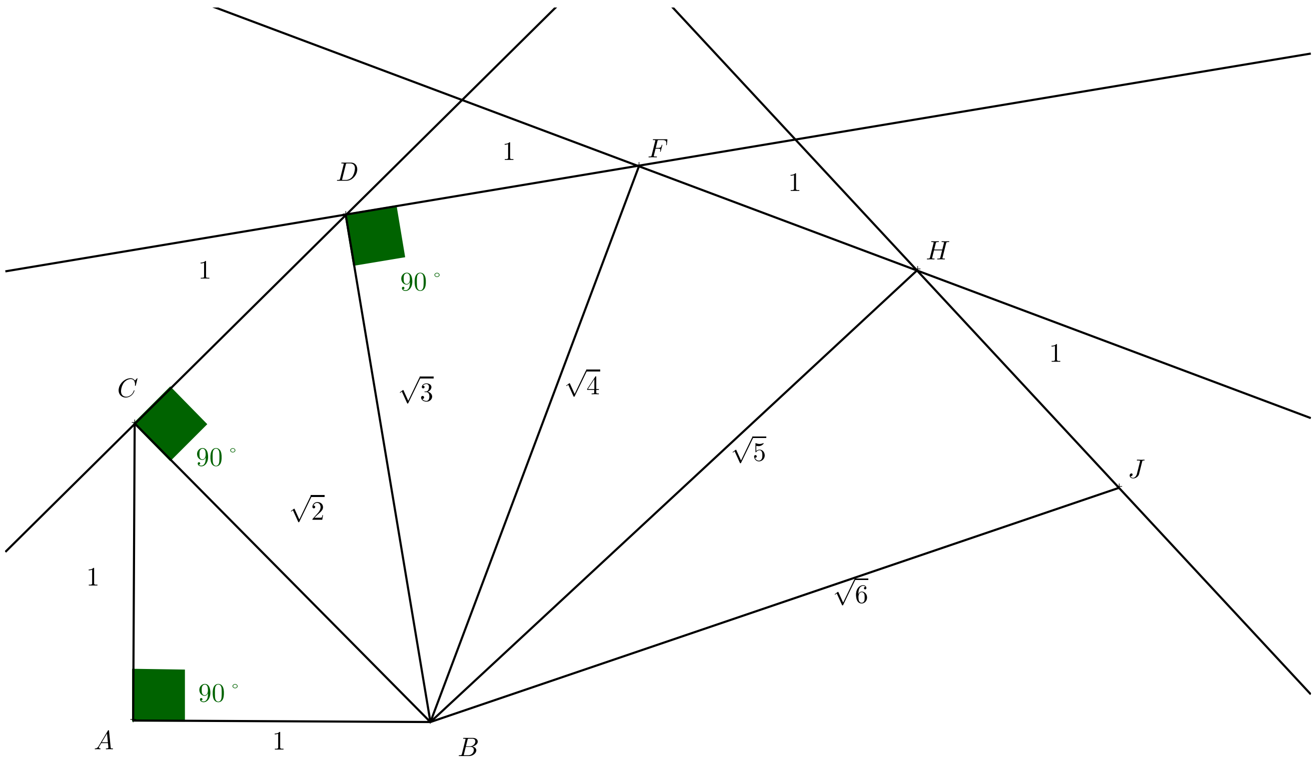


G
B
C
A


H
G
B
C
I
A


C
1
$\sqrt{2}$
90 °
A
1
B


D
1
C
90 °
$\sqrt{3}$
1
$\sqrt{2}$
90 °
A
1
B


1
F
D
1
1
90 °
H
C
$\sqrt{3}$
$\sqrt{4}$
1
90 °
$\sqrt{5}$
J
$\sqrt{2}$
1
$\sqrt{6}$
90 °
A
1
B