CORRECTION DE L'INTERROGATION N°14

Exercice 1. (10 points)

Dans un repère orthonormal on donne A(−2; −1), B(−1; 1), C(1; 5) et D(0; −1).

On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.

1. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   $\overrightarrow{AB}(-1-(-2); 1-(-1)) \iff \overrightarrow{AB}(1; 2)$.
   $\overrightarrow{AC}(1+2; 5+1) \iff \overrightarrow{AC}(3; 6)$.
   $\overrightarrow{AD}(0+2; -1+1) \iff \overrightarrow{AD}(2; 0)$.

   (b) Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
   On a $\overrightarrow{AB}(1; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(3; 6)$ donc $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

   (c) Démontrer que les points A, B et D ne sont pas alignés.
   On sait que $\overrightarrow{AC}(3; 6)$ et $\overrightarrow{AD}(2; 0)$, de plus $3 \times 0 - 6 \times 2 = -12 \neq 0$, ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les points A, C et D ne sont pas alignés.

2. Calculer AB, BD et AD. En déduire la nature du triangle ABD.

$$\mathrm{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$\mathrm{BD} = \sqrt{(0+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$\mathrm{AD} = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

   Comme AB = BD, le triangle ABD est isocèle.

3. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$
   $3\overrightarrow{AD}(6; 0)$ et $\overrightarrow{AM}(x_M + 2; y_M + 1)$, donc comme $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$, on résout :

$$x_M + 2 = 6 \Longrightarrow x_M = 4 \qquad \text{et} \qquad y_M + 1 = 0_M = -1$$

   Donc M(4; −1).

4. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires.
   $\overrightarrow{BD}(0+1; -1-1) \iff \overrightarrow{BD}(1; -2)$ et $\overrightarrow{CM}(4-1; -1-5) \iff \overrightarrow{CM}(3; -6)$, donc $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{BD}$, ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires.

5. En déduire sur la nature du quadrilatère BDMC.
   Puisque $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{BD}$, le quadrilatère CMDB est un trapèze.

Correction de l'interrogation n°14

Exercice 1. (10 points)

Dans un repère orthonormal on donne $A(-3;1)$, $B(1;1)$, $C(-3;-2)$ et $D(7;-3,5)$.

On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB}(1+3;1-1) \iff \overrightarrow{AB}(4;0)$$
$$\overrightarrow{AC}(-3+3;-2-1) \iff \overrightarrow{AC}(0;-3)$$
$$\overrightarrow{BC}(-3-1;-2-1) \iff \overrightarrow{BC}(-4;-3)$$

2. Déterminer les longueurs AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.

$$AB = \sqrt{4^2+0^2} = 4$$
$$AC = \sqrt{0+(-3)^2} = 3$$
$$BC = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = 5$$

Comme $BC^2 = 25$ et $AB^2+AC^2 = 4^2+3^2 = 25$ on en conclut que le triangle ABC est rectangle.

3. Soit I le milieu du segment [BC]. Déterminer les coordonnées de I.
$I\left(\dfrac{1-3}{2};\dfrac{1-2}{2}\right) \iff I\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires. En déduire la nature du quadrilatère AIDB.
$\overrightarrow{BD}(7-1;-3,5-1) \iff \overrightarrow{BD}(6;-4,5)$ et $\overrightarrow{AI}\left(-1+3;-\dfrac{1}{2}-1\right) \iff \overrightarrow{AI}(2;-1,5)$. On remarque que $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AI}$, ainsi les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et donc les droites (BD) et (AI) sont parallèles. Ainsi le quadrilatère AIDB est un trapèze.

5. Soit $M(x;1)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{DM}$, puis déduire la valeur de x telle que les points I, D et M soient alignés.
$\overrightarrow{ID}(7+1;-3,5+0,5) \iff \overrightarrow{ID}(8;-3)$ et $\overrightarrow{DM}(x-7;1+3,5) \iff \overrightarrow{DM}(x-7;4,5)$, donc comme $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires alors $8\times 4,5 = -3(x-7) \iff 36 = -3x+21 \iff x = \dfrac{36-21}{-3} = -5$