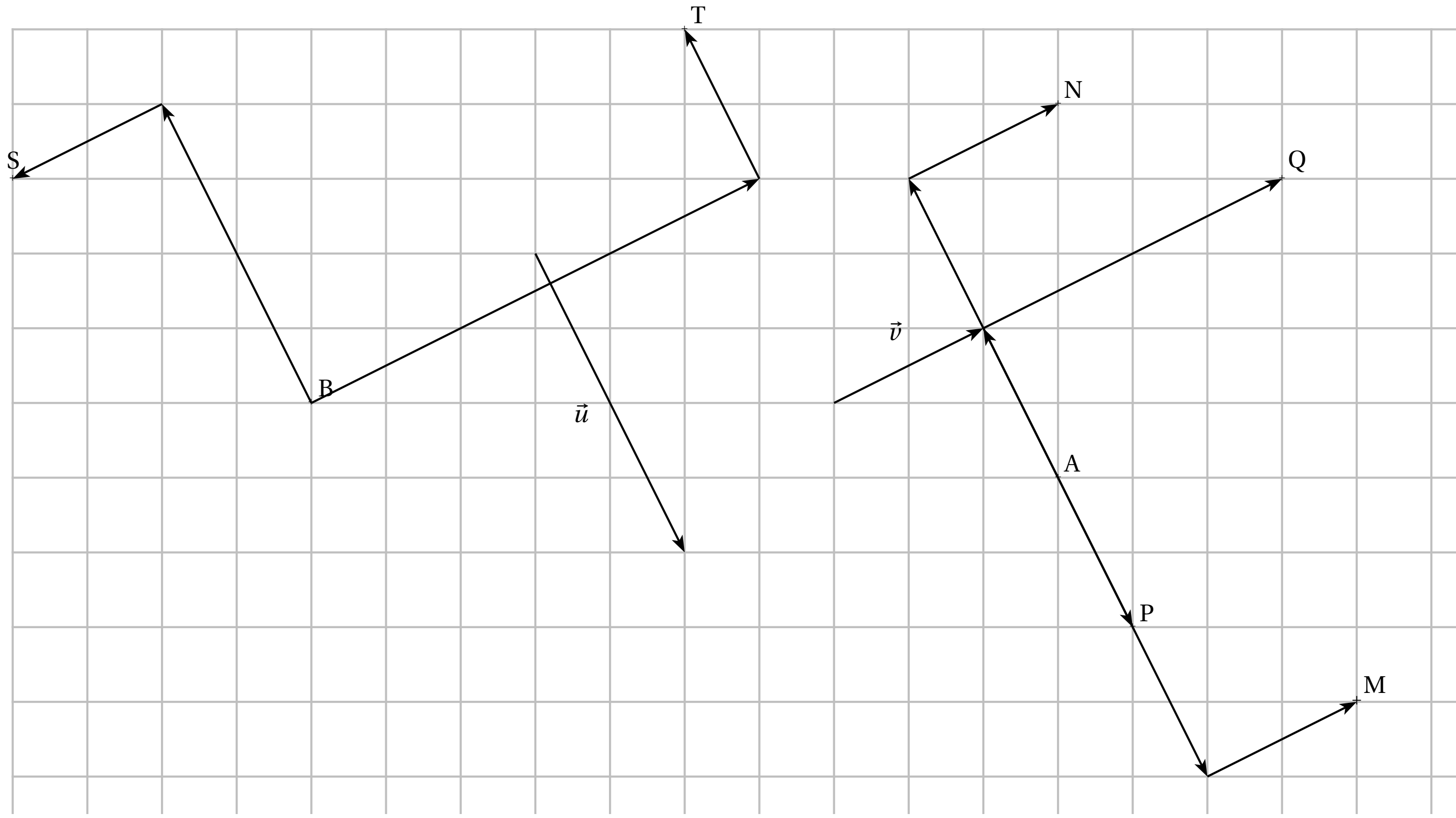
Correction du devoir surveillé 5

Exercice 1. Construction de point (6 points)

Dans la figure suivante on donne un représentant du vecteur $\vec{u}$, un représentant du vecteur $\vec{v}$ et deux points A et B du plan.



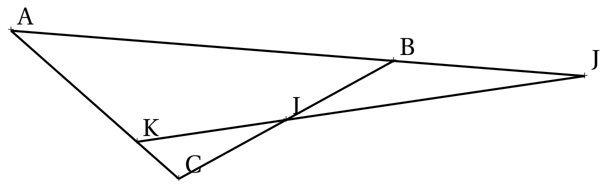
1. Placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Placer le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \vec{v} - \vec{u}$.
3. Placer le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{2}\vec{u}$.
4. Placer le point Q tel que $\overrightarrow{AQ} = -\dfrac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$.
5. Placer le point S tel que $\overrightarrow{SB} = \vec{u} + \vec{v}$.
6. Placer le point T tel que $\overrightarrow{TB} = -3\vec{v} + \dfrac{1}{2}\vec{u}$.

Exercice 2. Relation de Chasles-Alignement (5 points)

Soit ABC un triangle quelconque. On considère les points I , J et K tels que : $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

But : Démontrer que I, J **et** K **sont alignés.**

1.



2. *Expression du premier vecteur* $\overrightarrow{JK}$ *en fonction des points de la figure de base (A, B et C)* .

   Concernant les points J et K, l'énoncé nous donne $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

   On va donc décomposer le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en passant par le point A. On obtient :

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

3. *Expression du deuxième vecteur* $\overrightarrow{JI}$ *en fonction des points de la figure de base (A, B et C)*

   (a) Concernant les points J et I , l'énoncé nous donne $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

   On va donc décomposer le vecteur $\overrightarrow{JI}$ en passant par les points A et B. On obtient :

$$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

   (b) Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, on obtient :

$$\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

4. On a : $\overrightarrow{JK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc :

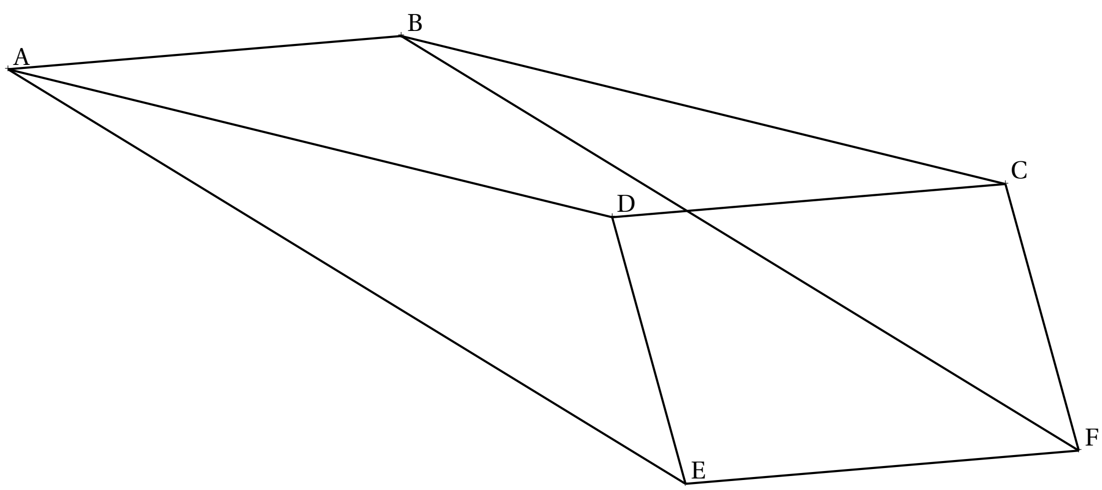
$$\overrightarrow{JK} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{JI}$$

   ce qui prouve que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 3. Vecteurs et parallélogrammes (4 points)

ABCD et CDEF sont deux parallélogrammes.

1. ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   CDEF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$.
2. D'après la question précédente on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ donc EFBA est un parallélogramme.



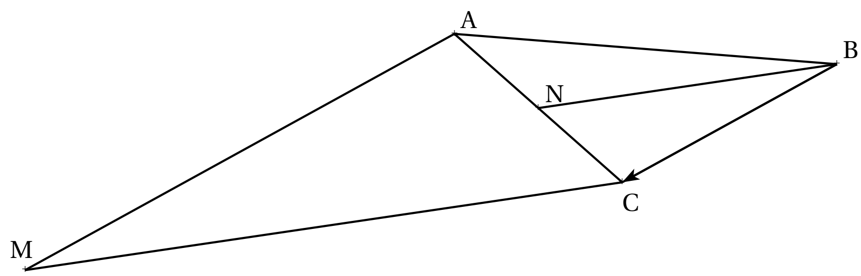
<u>Exercice</u> 4. Relation de Chasles et parallélisme. (5 points)

Soit ABC un triangle quelconque. On considère les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

But : démontrer que les droites (CM) et (BN) sont parallèles

1.



2. *Expression du premier vecteur* $\overrightarrow{CM}$ *en fonction des points de la figure de base (A, B et C)*. Avec le point M, l'énoncé nous donne $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$. On va donc décomposer $\overrightarrow{CM}$ en faisant apparaître le point A et on obtient :

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}$$

3. *Expression du deuxième vecteur* $\overrightarrow{BN}$ *en fonction des points de la figure de base (A, B et C)*

   (a) Avec le point N, l'énoncé nous donne $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On va donc décomposer $\overrightarrow{BN}$ en faisant apparaître le point A et on obtient :

   $$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

   (b) Comme $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ on a :

   $$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

4. On vient de voir que : $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}$, donc :

   $$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{BN}$$

   On en déduit que les droites (CM) et (BN) sont parallèles.