CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON 8 : POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

Dans ce devoir, toute trace de recherche, même non fructueuse, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

On connait la somme S de deux nombres x et y, elle vaut $S = 1$ et le produit P des deux mêmes nombres qui vaut lui $-\frac{3}{4}$.

1. Démontrer que x vérifie l'équation suivante : $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$.

   Il est dit que :

   $$x + y = 1 \Longleftrightarrow y = 1 - x \qquad \text{et} \qquad xy = -\frac{3}{4}$$

   Ainsi en utilisant la deuxième équation :

   $$x(1-x) = -\frac{3}{4} \Longleftrightarrow x - x^2 + \frac{3}{4} = 0 \Longleftrightarrow x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

   Dans la suite de l'exercice on note $P(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$.

2. Déterminer la forme canonique de la fonction P.

   Recherchons les antécédents de $-\frac{3}{4}$:

   $$P(x) = -\frac{3}{4} \Longleftrightarrow x^2 - x - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \Longleftrightarrow x^2 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \, x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

   Ainsi 0 admet deux antécédents, 0 et 1.

   L'axe de symétrie de la parabole de P admet pour équation $x = \frac{1}{2}$ et :

   $$P(0,5) = 0,5^2 - 0,5 - \frac{3}{4} = -1$$

   On en conclut donc que P admet l'écriture canonique suivante :

   $$P(x) = (x - 0,5)^2 - 1$$

3. Déterminer la forme factorisée de la fonction P.

   En utilisant la forme canonique, on trouve la forme factorisée :

   $$P(x) = (x-0,5)^2 - 1 = (x - 0,5 - 1)(x - 0,5 + 1) = (x - 1,5)(x + 0,5)$$

4. En déduire les racines de P (i.e en déduire les antécédents de 0).

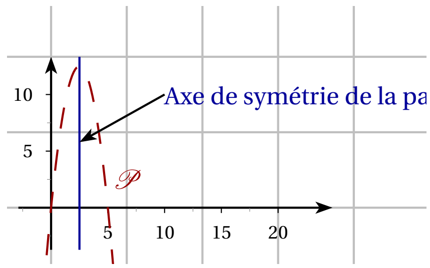
   $$P(x) = 0 \Longleftrightarrow (x-1,5)(x+0,5) = 0 \Longleftrightarrow x - 1,5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 0,5 = 0 \Longleftrightarrow x = 1,5 \quad \text{ou} \quad x = -0,5$$

5. P admet deux racines qui sont solutions du problème d'après la question 1. Ainsi si $x = 1,5$ alors $y = 1 - 1,5 = -0,5$ et si $x = -0,5$ alors $y = 1 + 0,5 = 1,5$.

Exercice 2.

Dans un repère, une parabole $\mathscr{P}$ passe par les points de coordonnées $O(0;0)$, $A(1;8)$ et $B(4;8)$

1. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la parabole $\mathscr{P}$.



La parabole $\mathscr{P}$ passe par les points d'ordonnées 8 et d'abscisse 0 et 5, par conséquent cette parabole admet la droite d'équation $x = 2,5$ comme axe de symétrie.

2. Déterminer l'expression de $f(x)$ où $\mathscr{P}$ représente la fonction f.
On cherche f sachant que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On sait que $f(0) = c$ et comme $f(0) = 0$ ici et bien $c = 0$.
On cherche maintenant f sachant que $f(x) = ax^2 + bx$ sachant que :

$$f(1) = a + b = 8 \qquad \text{et} \qquad f(4) = 16a + 4b = 8$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=8 \\ 16a+4b=8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=8-b \\ 4a+b=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=8-b \\ 32-4b+b=2 \Longrightarrow -3b=-30 \Longrightarrow b=10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=8-10=-2 \\ b=10 \end{array}\right.$$

L'expression de $f(x)$ où $\mathscr{P}$ représente la fonction f est donc :

$$f(x) = -2x^2 + 10x$$

3. En déduire les racines de P (i.e les antécédents de 0).

$$f(x) = 0 \iff -2x^2 + 10x = 0 \iff x(-2x+10) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -2x+10 = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 5$$

Les racines de P sont donc 0 et 5.

4. Donner le tableau de variation de f, puis le tableau de signe de f. $f(2,5) = -2 \times 2,5^2 + 10 \times 2,5 = -12,5 + 25 = 12,5$, de plus le coefficient devant le monôme en x^2 est négatif (-2) donc la parabole admet un maximum et on en déduit son tableau de variation :

x	$-\infty$	$2,5$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$12,5$	$\searrow$

Par conséquent :

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3.

Le but du problème est de résoudre l'inéquation :

$$x(4-2x) \leq (3x-1)(2-x)$$

1. (a) Dresser le tableau de signe de $\mathrm{A}(x) = (2-x)(-x+1)$ en fonction des valeurs de x.

$$\mathrm{A}(x) = (2-x)(-x+1) = 0$$

$$\text{soit} 2 - x = 0 \qquad \text{soit} - x + 1 = 0$$

$$x = 2 \qquad \text{et} \qquad x = 1$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$2-x$			$+$		0	$-$	
$-x+1$		$+$	0		$-$		
$\mathrm{A}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) En déduire les solutions de l'inéquation $\mathrm{A}(x) \leq 0$.

$$\mathscr{S} = [-1;2]$$

2. Démontrer que :

$$x(4-2x) \leq (3x-1)(2-x) \iff \mathrm{A}(x) \leq 0$$

$$
\begin{aligned}
& x(4-2x) \leq (3x-1)(2-x) \leq 0 && (1)\\
\iff \quad & x(4-2x) - (3x-1)(2-x) \leq 0 && (2)\\
\iff \quad & 2x(2-x) - (3x-1)(2-x) \leq 0 && (3)\\
\iff \quad & (2-x)(2x-(3x-1)) \leq 0 && (4)\\
\iff \quad & (2-x)(2x-3x+1) \leq 0 && (5)\\
\iff \quad & (2-x)(-x+1) \leq 0 && (6)\\
\iff \quad & \mathrm{A}(x) \leq 0 && (7)
\end{aligned}
$$

3. Conclure.

Puisque l'inéquation $x(4-2x) \leq (3x-1)(2-x)$ a le même ensemble de solution que $\mathrm{A}(x) \leq 0$, par conséquent :

$$\mathscr{S} = [-1;2]$$