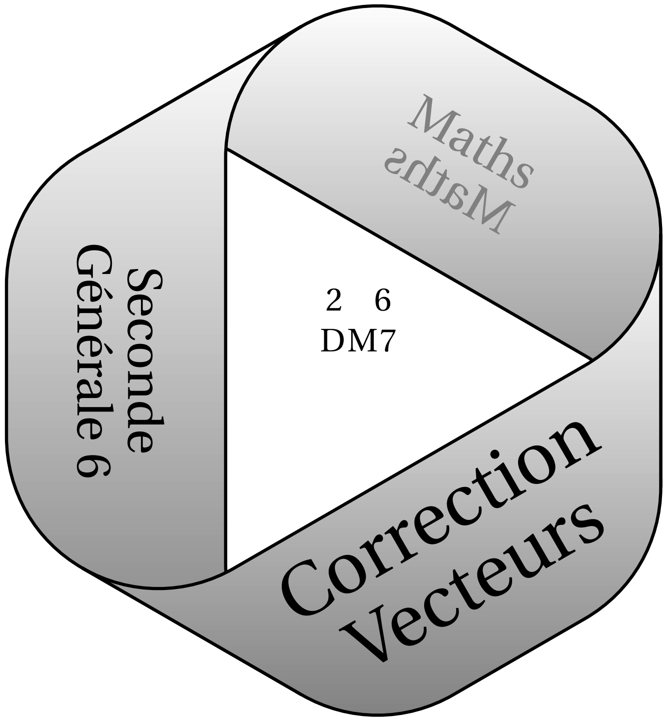

Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

Dans ce devoir, toute trace de recherche, même non fructueuse, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Remarque : Dans ce devoir, on montre dans un cas particulier un résultat toujours vraie, à savoir que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sont trois points alignés.

On se donne un repère orthonormal dans lequel on considère les points :

$$A(-1;-1) \qquad B(0;4) \qquad C(5;-1) \qquad O(2;1)$$

On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

1. **Où l'on détermine la nature du triangle** ABC
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AB}(0-(-1);4-(-1)) \iff \overrightarrow{AB}(1;5)$, de même $\overrightarrow{BC}(5-0;-1-4) \iff \overrightarrow{BC}(5,-5)$ et enfin $\overrightarrow{AC}(5-(-1);-1-(-1)) \iff \overrightarrow{AC}(6;0)$.
   (b) Calculer les longueurs AB, BC et AC.
   On a :
   $$AB = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \qquad BC = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} \qquad AC = \sqrt{6^2+0^2} = \sqrt{36} = 6$$
   (c) Conclure quant à la nature du triangle ABC.
   Le triangle ABC a des côtés qui mesurent des longueurs différentes, il n'est donc ni isocèle ni équilatéral. Le plus long de ses côtés est BC et $BC^2 = 50$.
   De plus $AB^2 + AC^2 = 26+36 \neq 50$. On en conclut qu'il n'est pas rectangle non plus.
   ABC est donc un triangle quelconque.
2. **Où l'on montre que** O **est le centre du cercle circonscrit au triangle** ABC
   (a) Calculer les distances OA, OB et OC.
   $$OA = \sqrt{(-1-2)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \qquad OB = \sqrt{(0-2)^2+(4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
   $$OC = \sqrt{(5-2)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

En déduire que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on donnera le rayon.
On vient de démontrer que $OA = OB = OC = \sqrt{13}$, les points A, B et C sont donc trois points du cerlc ede centre O et de rayon $\sqrt{13}$.

(b) Conclure.
O est donc le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

3. **Où l'on détermine les coordonnées du centre de gravité** G **du triangle** ABC**.**

(a) Déterminer les coordonnées du milieu B′ du segment [AC].
$B'\left(\dfrac{-1+5}{2};\dfrac{-1-1}{2}\right) \iff B'(2;-1)$.

(b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BB'}$, puis celles du vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.
$\overrightarrow{BB'}\left(2-0;-1-4\right) \iff \overrightarrow{BB'}(2;-5)$.

(c) On rappelle que le centre de gravité G est l'unique point qui vérifie $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.
En déduire que G a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.
Le vecteur $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{10}{3}\right)$ et $\overrightarrow{BG}(x_G-0;y_G-4)$, par conséquent comme $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ on a :

$$x_G = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad y_G - 4 = -\frac{10}{3} \Longrightarrow y_G = -\frac{10}{3} + 4 = \frac{2}{3}$$

4. **Où l'on détermine les coordonnées de l'orthocentre** H **du triangle** ABC
On utilisera le résultat suivant, qui n'est pas au programme de la classe de seconde :

Théorème 1 :
Dans un repère orthonormal on donne $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$. Dans ce cas on a :
$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$$

(a) On note H(0;0).
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AH}$.
$\overrightarrow{BH}(0;-4)$ et $\overrightarrow{CH}(0-5;0-(-1)) \iff \overrightarrow{CH}(-5;1)$, enfin $\overrightarrow{AH}(0-(-1);0-(-1)) \iff \overrightarrow{AH}(1;1)$.

(b) En appliquant le théorème ci-dessus, montrer que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$, que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} = 0\times 6 + (-4)\times 0 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} = 1\times 5 + 1\times(-5) = 5-5 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB} = -5\times 1 + 1\times 5 = -5+5 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$$

(c) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.
On vient de démontrer que (BH) ⊥ (AC), (AH) ⊥ (BC) et (CH) ⊥ (AB), ce qui prouve que les droites (BH), (AH) et (CH) sont les trois hauteurs du triangle ABC, comme H est commun aux trois hauteurs, il s'agit de l'orthocentre du triangle ABC.

5. **Où l'on montre que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont trois points alignés, ils forment une droite que l'on appelle la droite d'Euler.**

(a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$.
$\overrightarrow{OG}\left(\dfrac{4}{3}-2;\dfrac{2}{3}-1\right) \iff \overrightarrow{OG}\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.
$\overrightarrow{OH}\,(0-2;0-1) \iff \overrightarrow{OH}\,(-2;-1)$

(b) Déterminer un nombre réel k tel que $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OH}$.
Comme $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}\times(-2;-1)$ donc $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OH}$.

(c) Conclure.
On vient de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires, par conséquent les droites (OG) et (OH) sont parallèles. O est commun au deux droites donc les points O, H et G sont alignés.