Correction du devoir Maison 1

On appelle « fraction egyptienne »toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$ où n désigne un nombre entier naturel non nul (i.e $n \in \mathbb{N}^*$). Dans l'egypte ancienne, on écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de somme de fractions egyptiennes toutes différentes.

Exemple :

La fraction $\frac{25}{28}$ peut par exemple s'écrire $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$.

Objectif

Le but du problème est de présenter quelques méthodes de décomposition de nombres rationnels en somme de « fractions égyptiennes »toutes différentes.

Partie A : Quelques exemples

1.
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{3}{4}+\frac{1}{7}=\frac{21}{28}+\frac{4}{28}=\frac{25}{28}$$

2.
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{32}{64}+\frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64}=\frac{32+16+8+4+2+1}{64}=\frac{63}{64}$$

3.
$$\frac{5}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

Partie B : Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer a un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal produit de deux nombres entiers naturels **impairs** p et q.

1. (a) On a :

$$\frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}=\frac{2}{p(p+q)}+\frac{2}{q(p+q)}=\frac{2q}{pq(p+q)}+\frac{2p}{pq(p+q)}=\frac{2p+2q}{pq(p+q)}=\frac{2(p+q)}{pq(p+q)}=\frac{2}{pq}$$

   (b) p et q désignent deux nombres impairs, par conséquent la somme $p+q$ est un nombre pair, et donc $\frac{p+q}{2}$ est un entier naturel.

   (c) D'après la question précédente, $\frac{p+q}{2}$ est un entier naturel, par conséquent le produit $p\frac{p+q}{2}$ est aussi un nombre entier naturel, de même que le produit $q\frac{p+q}{2}$.
   Ainsi les dénominateurs des fractions de la formule de la question 1 sont bien des nombres entiers naturels.

2. On remarque que $15=3\times 5$, 3 et 5 sont bien deux nombres entiers naturels impairs, par conséquent d'après la question 1. on a :
$$\frac{2}{15}=\frac{1}{3(3+5)/2}+\frac{1}{5(3+5)/2}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$$
On obtient alors une première décomposition en somme de fractions egyptiennes. En décomposant $15=1\times 15$ on obtient cette fois :
$$\frac{2}{15}=\frac{1}{1(1+15)/2}+\frac{1}{15(1+15)/2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$$

3. Toujours en utilisant la formule de la question 1. on obtient :

$$\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{1(1+2n+1)/2}+\frac{1}{(2n+1)(1+2n+1)/2}=\frac{1}{(2n+2)/2}+\frac{1}{(2n+1)(n+1)}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

4. **Application** : On remarque que $21=2\times 10+1$, ainsi on applique le résultat précédent pour $n=10$ et on

obtient :

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{10+1} + \frac{1}{21(10+1)} = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

On remarque que $101 = 2 \times 50 + 1$, on applique le résultat précédent pour $n = 50$ et on obtient :

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{50+1} + \frac{1}{101(50+1)} = \frac{1}{51} + \frac{1}{5151}$$

Seul les élèves motivés, curieux et à l'aise avec le calcul tenteront de répondre à cette dernière question

Partie C : « Algorithme glouton »de Fibonacci

En 1201, Léonard de Pise ($1175 - 1250$), dit « Fibonacci », prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de « fractions égyptiennes »toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition :

« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne une fraction égyptienne. »

On remarque que :

$$\frac{1}{7} < \frac{13}{81} < \frac{1}{6}$$

Ce qui montre que la plus grande fraction égyptienne qui est inférieure à $\frac{13}{81}$ est $\frac{1}{7}$, on applique alors l'algorithme :

$$\frac{13}{81} - \frac{1}{7} = \frac{91}{567} - \frac{81}{567} = \frac{10}{567}$$

On remarque que :

$$\frac{1}{57} < \frac{10}{567} < \frac{1}{56}$$

On réitère l'algorithme glouton :

$$\frac{10}{567} - \frac{1}{57} = \frac{1}{10773}$$

Nous obtenons une fraction egyptienne, nous pouvons donc stopper l'algorithme.

Au final on a vu que :

$$\frac{13}{81} - \frac{1}{7} = \frac{10}{567} \iff \frac{13}{81} = \frac{10}{567} + \frac{1}{7}$$

Or, $\frac{10}{567} = \frac{1}{10773} + \frac{1}{57}$, On peut alors conclure, et donner une décomposition en fraction egyptienne de $\frac{13}{81}$ qui est :

$$\frac{13}{81} = \frac{1}{7} + \frac{1}{57} + \frac{1}{10773}$$