DEVOIR SURVEILLÉ 5

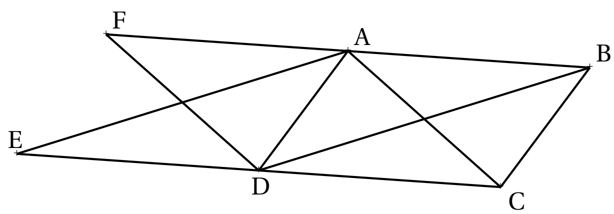
Exercice 1. Construction de point (6 points)

ABC est un triangle quelconque.
Placer les points E, F, G, H, I et J tels que :

1. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
3. $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
4. $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
5. $\overrightarrow{AH} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
6. $\overrightarrow{JB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2. Vecteurs et parallélogrammes (4 points)

ABCD, ABDE et ACDF sont des parallélogrammes.



1. Donner en justifiant trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.
2. En déduire que :
   (a) A est le milieu de [BF].
   (b) D est le milieu de [EC].
   (c) ADEF est un parallélogramme.

Exercice 3. Relation de Chasles et parallélisme. (5 points)

Soit ABC un triangle quelconque. On considère les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

But : démontrer que les droites (CM) et (BN) sont parallèles

1. Réaliser une figure.
2. *Expression du premier vecteur* $\overrightarrow{CM}$ *en fonction des points de la figure de base (A, B et C).*
   Démontrer que : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}$
3. *Expression du deuxième vecteur* $\overrightarrow{BN}$ *en fonction des points de la figure de base (A, B et C)*
   (a) Démontrer que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
   (b) En décomposant $\overrightarrow{BA}$ par $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, montrer que :
   $$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$$
4. En déduire que $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{BN}$ puis conclure.

Exercice 4. Relation de Chasles-Alignement (5 points+bonus)

Soit ABC un triangle quelconque. On considère les points M, N et P tels que :

$$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0} \quad ; \quad 3\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NC}=\vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

But : Démontrer que M, N **et** P **sont alignés.**
Remarque : On pourra utiliser le résultat d'une question même si on n'y pas répondu.

1. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{CA}$.
   (c) Démontrer que $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Préciser la position du point P.
   (d) Réaliser une figure.
2. *Expression du premier vecteur* $\overrightarrow{NM}$ *en fonction des points de la figure de base (A, B et C)* .
   Démontrer que $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.
   En déduire que :
   $$\overrightarrow{NM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$
3. *Expression du deuxième vecteur* $\overrightarrow{PM}$ *en fonction des points de la figure de base (A, B et C)*
   (a) Démontrer que $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
   (c) Démontrer que $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
   En déduire que :
   $$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
4. Montrer que $4\overrightarrow{MP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$, puis conclure.

Exercice 5. **Question Cactus**

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] d'un quadrilatère ABCD.
Voici la figure, mais le quadrilatère ABCD a été effacé.
Peut-on le retrouver ?