DEVOIR MAISON 7 : LA DROITE D'EULER

Dans ce devoir, toute trace de recherche, même non fructueuse, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Remarque : Dans ce devoir, on montre dans un cas particulier un résultat toujours vraie, à savoir que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sont trois points alignés.

On se donne un repère orthonormal dans lequel on considère les points :

$$A(-1;-1) \qquad B(0;4) \qquad C(5;-1) \qquad O(2;1)$$

On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

1. **Où l'on détermine la nature du triangle** ABC
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Calculer les longueurs AB, BC et AC.
   (c) Conclure quant à la nature du triangle ABC.
2. **Où l'on montre que** O **est le centre du cercle circonscrit au triangle** ABC
   (a) Calculer les distances OA, OB et OC.
   En déduire que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on donnera le rayon.
   (b) Conclure.
3. **Où l'on détermine les coordonnées du centre de gravité** G **du triangle** ABC**.**
   (a) Déterminer les coordonnées du milieu B′ du segment [AC].
   (b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BB'}$, puis celles du vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.
   (c) On rappelle que le centre de gravité G est l'unique point qui vérifie $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.
   En déduire que G a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
4. **Où l'on détermine les coordonnées de l'orthocentre** H **du triangle** ABC
   On utilisera le résultat suivant, qui n'est pas au programme de la classe de seconde :

   Théorème 1 :
   Dans un repère orthonormal on donne $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Dans ce cas on a :
   $$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$$

   (a) On note H(0; 0).
   Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AH}$.
   (b) En appliquant le théorème ci-dessus, montrer que $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$, que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$.
   (c) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.
5. **Où l'on montre que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont trois points alignés, ils forment une droite que l'on appelle la droite d'Euler.**
   (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$.
   (b) Déterminer un nombre réel k tel que $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OH}$.
   (c) Conclure.