# Devoir Maison 1

On appelle « fraction egyptienne »toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$ où $n$ désigne un nombre entier naturel non nul (i.e $n \in \mathbb{N}^*$). Dans l'egypte ancienne, on écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de somme de fractions egyptiennes toutes différentes.

**Exemple :**

La fraction $\frac{25}{28}$ peut par exemple s'écrire $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$.

***Objectif***

Le but du problème est de présenter quelques méthodes de décomposition de nombres rationnels en somme de « fractions égyptiennes »toutes différentes.

**Partie A : Quelques exemples**

1. Vérifier que :
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{25}{28}$$
2. Calculer la somme des six « fractions égyptiennes » :
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$
3. Décomposer $\frac{5}{8}$ en somme de « fractions egyptiennes »toutes différentes.

**Partie B : Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier**

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer a un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal produit de deux nombres entiers naturels **impairs** $p$ et $q$.

1. (a) Démontrer la formule :
$$\frac{2}{pq}=\frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$
   (b) Expliquer pourquoi $\frac{p+q}{2}$ est un nombre entier naturel.
   (c) Justifier que les dénominateurs des fractions précédentes (de la question 1) sont des nombres entiers naturels.
2. **En utilisant la formule établie à la question** 1, trouver deux décompositions différentes de $\frac{2}{15}$ en somme de « fractions égyptiennes »différentes. [1]
3. Soit $n$ un nombre entier naturel non nul. En écrivant $2n+1=1\times(2n+1)$, donner une décomposition de la fraction $\frac{2}{2n+1}$ en somme de deux fractions « egyptiennes »différentes.
4. **Application** : Appliquer le résultat de la question précédente pour $\frac{2}{21}$ et $\frac{2}{101}$.

**Seul les élèves motivés, curieux et à l'aise avec le calcul tenteront de répondre à cette dernière question**

**Partie C : « Algorithme glouton »de Fibonacci**

En 1201, Léonard de Pise $(1175-1250)$, dit « Fibonacci », prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de « fractions égyptiennes »toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition :

« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne une fraction egyptienne. »

Appliquer cet algorithme à $\frac{13}{81}$ et donner une décomposition de la fraction $\frac{13}{81}$ en somme de « trois fractions egyptiennes »toutes différentes.

1. On remarquera que $15=1\times 15$