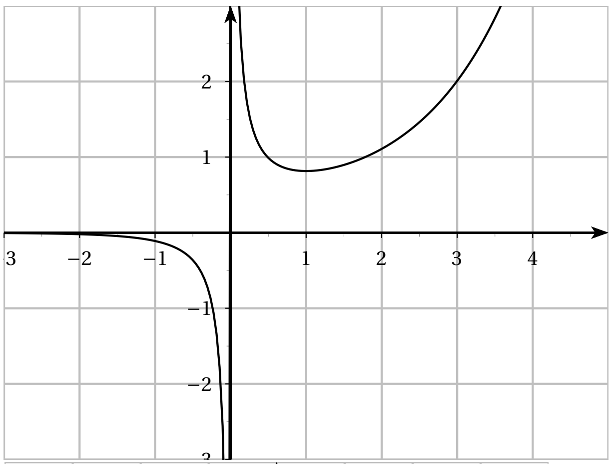
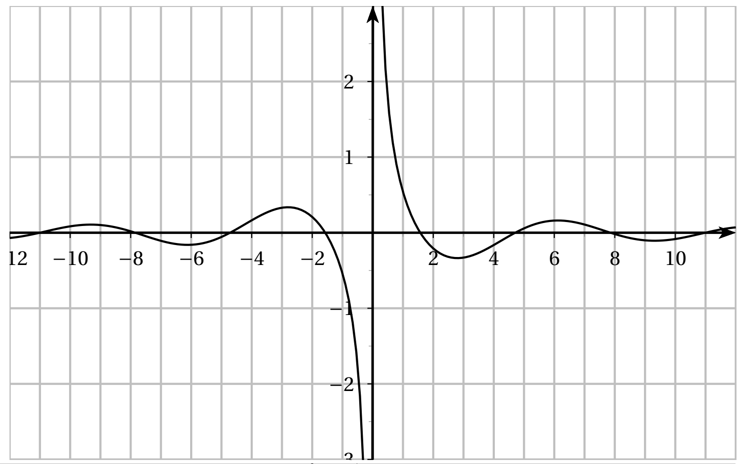
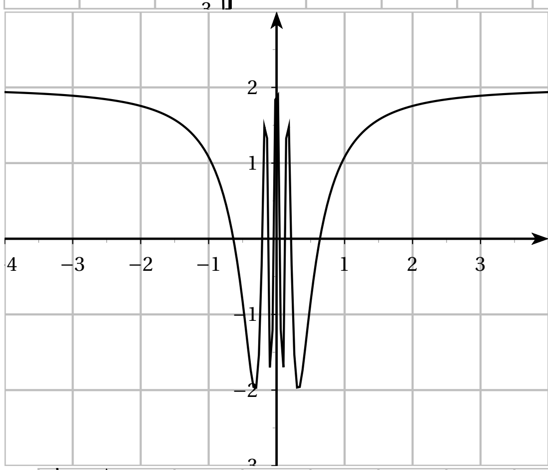
# ∽ Exercices ∽
# Limites

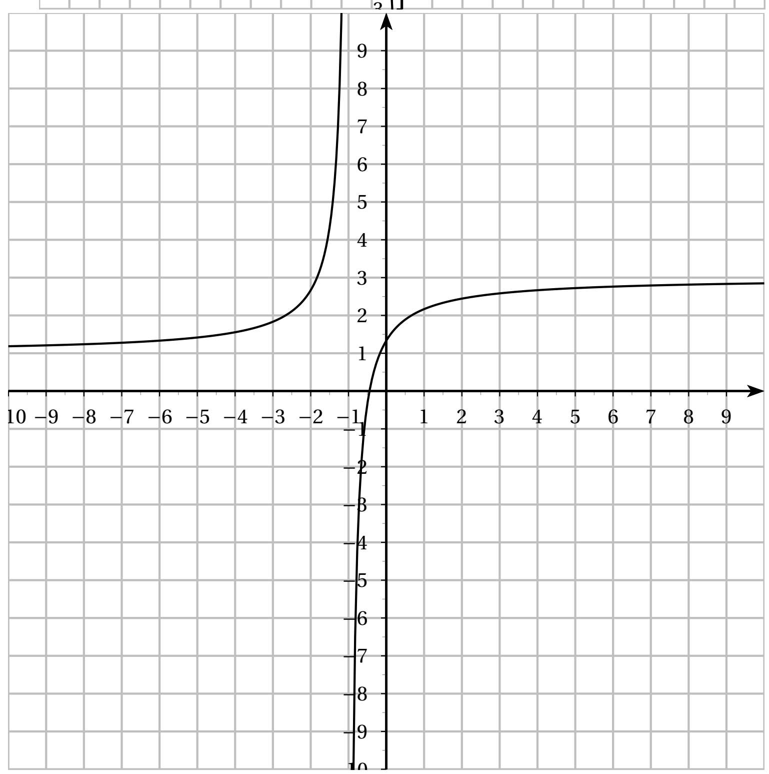
**Exercice 1** : On donne les représentations graphiques de diverses fonctions. Dans chaque cas :

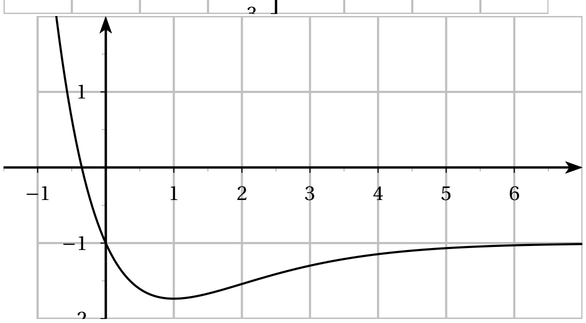
1. Lire graphiquement les équations des éventuelles asymptotes
2. En déduire les limites correspondantes
3. Dresser graphiquement le tableau de variations de la fonction représentée en y faisant figurer les limites trouvées.











**Exercice 2** : On donne le tableau de variations d'une fonction $f$ ci-contre.

1. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
2. Donner les équations des asymptotes à la courbe représentative de $f$.
3. Tracer ces asymptotes dans un repère, puis dessiner une courbe représentative possible pour $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $4$ ↘ | | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-0.5$ | ↘ | $-3$ |

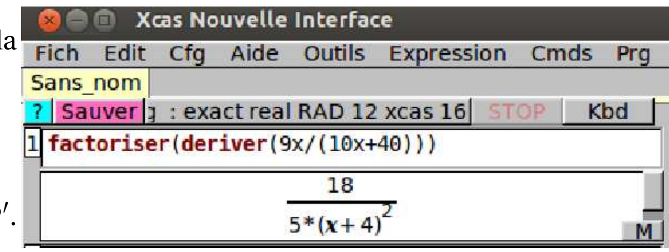
**Exercice 3** : On considère une fonction $f$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous mais il manque des informations.
On sait également que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ admet la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = 1$ pour asymtptote ainsi que la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $x = 5$.

1. Placer ces deux dernières informations dans le tableau.
2. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
3. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle d'autres asymptotes que celles données ? Si oui, préciser leur équation.
4. Dessiner une courbe $\mathscr{C}$ compatible avec ce tableau.

| $x$ | $-\infty$ | | 3 | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $-2$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | |

**Exercice 4** : Une entreprise souhaite promouvoir un nouveau produit : elle envisage alors de réaliser une campagne de publicité. Elle estime que la proportion de la population qui connait le nom du produit après $x$ semaines de publicité est donnée par $P(x) = \dfrac{9x}{10x+40}$.

1. **Conjectures graphiques :**
   a. Tracer à la calculatrice la représentation graphique de la fonction P.
   b. Conjecturer les variations de P sur $[0; +\infty[$.
2. **Preuves par le calculs :**
   a. En utilisant le résultat donné par Xcas, étudier le signe de $P'$.
   b. En déduire les variations de la fonction P.



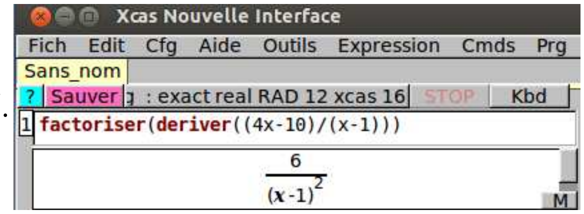

3. **Avec un tableau de valeurs :**
   a. En utilisant un tableau de valeurs sur la calculatrice, déterminer le nombre de semaines nécessaires pour que 80% de la population connaisse le nom du nouveau produit.
   b. En procédant de la même façon, compléter le tableau suivant :

| Proportion de la population qui connaît le nom du produit | 85 % | 88 % | 89% | 89,5% | 89,9% | 89,99% | 89,999% | 90% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nb de semaines nécessaires pour dépasser cette proportion | | | | | | | | |

   c. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?
4. **Conclusion :**
   a. Ajuster la fenêtre graphique de votre calculatrice pour observer ce résultat.
   b. Rajouter cette information dans le tableau de variations de P établi à la question 2.

**Exercice 5** : On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-10}{x-1}$

1. **Conjectures graphiques :**
   a. Tracer à la calculatrice la représentation graphique de la fonction $f$.
   b. Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de $f$ sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
   c. Quelle semble être la limite de $f$ en $-\infty$ ? en $+\infty$ ? Justifier à l'aide d'une interprétation graphique.




2. **Preuves par le calculs :**
   **a.** En utilisant le résultat donné par Xcas, étudier le signe de $P'$.
   **b.** En déduire les variations de la fonction P.

3. **Avec un tableau de valeurs :**
   **a.** On s'intéresse maintenant aux images par $f$ juste avant sa valeur interdite 1.
   En utilisant un tableau de valeurs à la calculatrice, compléter le tableau ci-contre.

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

   **b.** Interpréter cela en termes de limite et rajouter cette information dans le tableau de variations établi à la question 2.
   **c.** Que se passe-t-il graphiquement ?

4. **Avec un algorithme :** on donne l'algorithme suivant

**Algorithme 1 :**

**Variables**
$n$ est un nombre entier
$x$ et $y$ sont des nombres réels
**Début**
**Pour** $n$ allant de 1 à 5 **Faire**
$x$ prend la valeur $1 + 10^{-n}$
$y$ prend la valeur $(4x - 10)/(x - 1)$
Afficher $y$
**Fin Pour**
**Fin**

   **a.** Compléter la trace d'exécution ci-dessous.

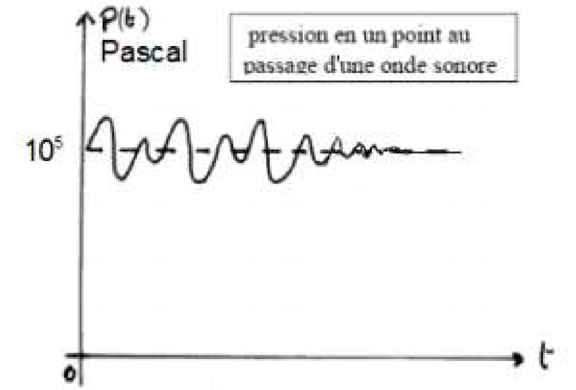
| | $n$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 1ère itération | | | |
| 2ère itération | | | |
| 3ère itération | | | |
| 4ère itération | | | |
| 5ère itération | | | |

   **b.** Interpréter en termes de limite et rajouter cette information dans le tableau de variations établi à la question 2.

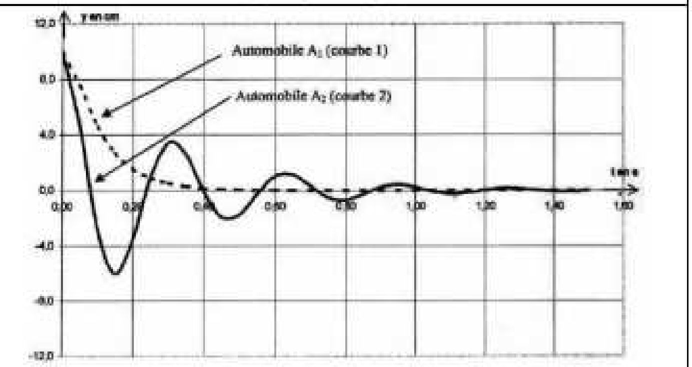
**Exercice 6** : La fonction racine carré possède-t-elle une asymptote horizontale ?

**Exercice 7** : Décrire les situations suivantes en termes de limites et d'asymptotes horizontales.

## SITUATION 1



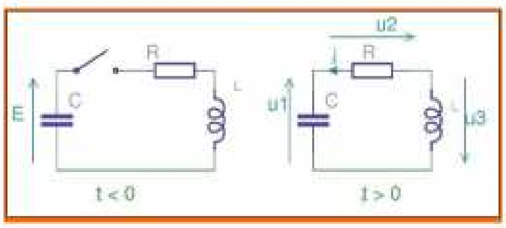

## SITUATION 2



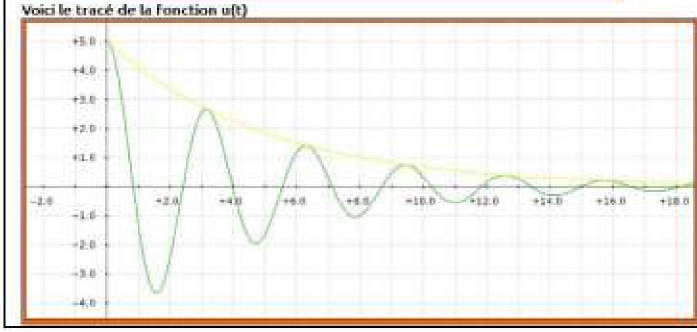

*La figure présente les courbes y(t) des positions du centre d'inertie G du solide modélisant chaque automobile lors du passage sur une bosse.*

## SITUATION 3

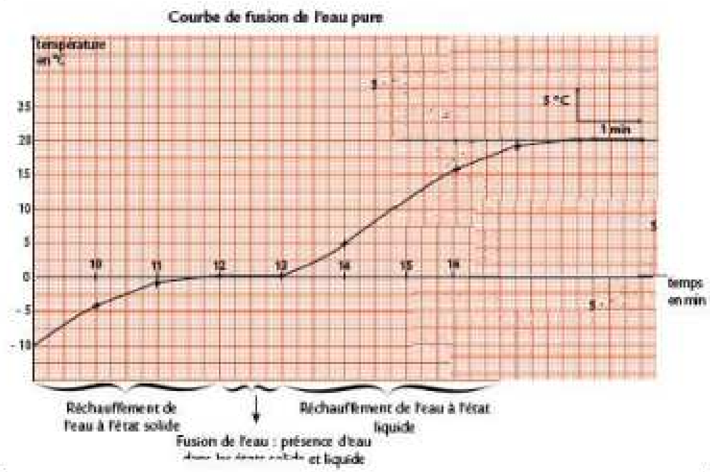
Tension au bord du condensateur dans un circuit RLC...




Voici le tracé de la fonction u(t)



## SITUATION 4





c.auperin@wicky-math.fr.nf

**Exercice 8** : Soit $g$ la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ par $g(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$.

**1.** Déterminer $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}} g(x)$

**2.** Déterminer $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}} g(x)$

**Exercice 9** : Soit $f$ la fonction définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-5}{4x+12}$.

**1.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

**2.** Déterminer $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-3} f(x)$ et $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-3} f(x)$

**3.** En déduire les éventuelles asymptotes verticales et horizontales à la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

**Exercice 10** : Soit $g$ la fonction définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;1[\cup]1;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{4x^2+5}{x^2+2x-3}$.

**1.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

**2.** Déterminer $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1} g(x)$

**3.** Déterminer $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-3} g(x)$ et $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-3} g(x)$

**4.** En déduire les éventuelles asymptotes verticales et horizontales à la courbe représentative de $g$ dans un repère orthonormé.

**Exercice 11** : Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{5x-3}{3+x^2}$.

**1.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

**2.** En déduire les éventuelles asymptotes verticales et horizontales à la courbe représentative de $h$ dans un repère orthonormé.

**Exercice 12** : Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $]-\infty;-3[\cup]-3;0[\cup]0;+\infty[$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ |

**1.** Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elles est vraie ou fausse. **Justifier.**

**a.** L'axe des ordonnées est une asymptote de $\mathscr{C}$

**b.** La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales

**c.** La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes horizontales

**d.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

**e.** $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0} \left(f(x)\right)^4=-\infty$

**f.** L'équation $f(x)=0$ admet trois solutions.

**2.** Dans un repère orthonormé,

**a.** Tracer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

**b.** Tracer ensuite dans ce repère une courbe $\mathscr{C}$ compatible avec les informations du tableau.

**Exercice 13** :

1. Le module de l'impédance complexe d'un condensateur de capacité C traversé par un courant de fréquence $x$ en régime variable est donné par $\mathrm{M}(x) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{C}x}$
   a. Déterminer les limites de $\mathrm{M}(x)$ quand la fréquence $x$ tend vers 0 et quand $x$ tend vers $+\infty$.
   b. On sait que le module de l'impédance d'un circuit fermé (court-circuit) est nul alors que le module de l'impédance d'un circuit ouvert (interrupteur ouvert) tend vers $+\infty$.
   D'après la question **a**, pour des fréquences très faibles, le comportement d'un condensateur se rapproche-t-il d'un circuit ouvert ou d'un circuit fermé ?
   c. Reprendre la question **b** pour des fréquences très élevées.
2. Le module de l'impédance complexe d'une bobine d'inductance L traversée par un courant de fréquence $x$ en régime variable est donné par $\mathrm{M}(x) = 2\pi \mathrm{L}x$.
   Reprendre la question **1** dans ce cas.