Correction DS
Ln

Exercice 1 : **(3 points)**

$$\begin{aligned}
3^n &\geq 1000 \\
\ln(3^n) &\geq \ln(1000) \quad \text{le sens ne change pas car la fonction ln est croissante sur les positifs} \\
n\ln(3) &\geq \ln(1000) \\
n &\geq \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} \quad \text{le sens ne change pas car } 3 > 1 \text{ donc } \ln(3) > 0
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(1000)}{\ln(3)} \simeq 6.29$ Donc l'ensemble des solutions est $[7; +\infty[$

$$\begin{aligned}
0.3^n &\leq 0.001 \\
\ln(0.3^n) &\leq \ln(0.001) \quad \text{le sens ne change pas car la fonction ln est croissante sur les positifs} \\
n\ln(0.3) &\leq \ln(0.001) \\
n &\geq \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.3)} \quad \text{le sens change car } 0.3 < 1 \text{ donc } \ln(0.3) < 0
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(0.001)}{\ln(0.3)} \simeq 5.73$ Donc l'ensemble des solutions est $[6; +\infty[$

Exercice 2 : **(3 points)**

x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$				$+$			
Variation de $\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3 : **(14 points)**

1. **a.** Sur le graphique on voit que f est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$; donc sur cet intervalle $f'(x) < 0$: seuls les points de Γ ont leurs ordonnées négatives : Γ est donc la représentation de f'.
Ou encore, on voit que f est positive puis négative, donc ses primitives sont décroissantes puis croissantes. : seule la courbe C vérifie cela. Donc C est la représentation graphique de l'une des primitives de f et par élimination, Γ est la représentation de f'.

   b. D'après la question précédente C est la représentation graphique de l'une des primitives de f. On lit sur le graphe que le point de C d'abscisse 1 a pour ordonnée 1. $F(1) = 1$.

2. **a.** On a pour $x > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} ln x = -\infty$, donc par différence $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty$.
Graphiquement ceci signifie que l'axe des ordonnées est asymptote verticale au graphe de f.

   b. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} -\ln x = -\infty$, donc par somme de limites,
$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

   c. Sur $]0\,;\,+\infty[$, f est dérivable et
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

   d. Ainsi $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1\times x}{x\times x} = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{-1-x}{x^2} = -\dfrac{x+1}{x^2} = \dfrac{-x-1}{x^2}$.

   e. Comme $x^2 > 0$ pour $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $-x-1$.
$-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$ et $-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$.
Comme $x > 0$, la dérivée est donc négative et ceci confirme que la fonction f est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. D'oÃ¹ le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. **a.** On a $H'(x) = 1 - 1\ln x - (x-1)\times\dfrac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} - \ln x = f(x)$.
H est donc une des primitives de f.

   b. On a $H(1) = \dfrac{1}{1} - \ln 1 = 1$ et on a vu que $F(1) = 1$, donc $F = H$ et $F(x) = x - (x-1)\ln x$.