Devoir Commun (4h)
Correction

Exercice 1 : (11 points)

1. Grâce au graphique, on conjecture que :

   a. $y=1$ et $x=1$ sont asymptotes à la courbe représentative de f.

   b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

   c. La solution de l'équation $f(x)=2$ est environ 9

   d.

x	1	$+\infty$
variations de $f(x)$	$+\infty$ ↘	1

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12}{x^2}=0$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{8}{x}+\dfrac{12}{x^2}=1+0+0=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{8}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12}{x^2}=+\infty$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{8}{x}+\dfrac{12}{x^2}=+\infty$

4. a. $f(x)=1+8\times\dfrac{1}{x}+12\times\dfrac{1}{x^2}$

   $f'(x)=0+8\times\dfrac{-1}{x^2}+12\times\dfrac{-2}{x^3}=-\dfrac{8}{x^2}-\dfrac{24}{x^3}=\dfrac{-8x}{x^3}-\dfrac{24}{x^3}=\dfrac{-8x-24}{x^3}$

   b. et c. $f'(x)=0 \overset{x\neq 0}{\iff} -8x-24=0 \iff -8x=24 \iff x=-3$ D'où le tableau

x	0	$+\infty$
signe de $-8x-24$	$-$	
signe de x^3	$+$	
signe de $f'(x)$	$-$	
variations de f	$-\infty$ ↘	1

5. la solution de $f(x)=2$ est comprise entre $9{,}2$ et $9{,}3$

6. Finalement, on a confirmé aucune conjecture.

Exercice 2 : (11 points)

1. Le TGV freine, donc sa vitesse décroit tandis que sa vitesse croit.
   Ainsi, la courbe C_1 est celle de V tandis que la courbe C_2 est celle de D.

2. Le temps d'arrêt est $t=60$ s, car c'est à cet instant que la courbe C_1 coupe l'axe des abscisses.

3. On regarde C_2 et on lit l'image de $t=60$. On trouve alors que la distance est de $42\,000$ m.

4. a. 360 km/h représente $360\,000$ m/h car 1 km = 1000 m.

   De plus 1 h contient 3600 secondes. Donc la vitesse initiale est $\dfrac{360\,000}{3\,600}=1\,000$ m/s.

   Ainsi, $V(0)=1\,000$

   b. V est une primitive de l'accélération a. Or $a(t)=-0.5t$.

   Donc on sait que $V(t)=-0.5\dfrac{t^2}{2}+k=-0.25t^t+k$ où k est une constant à déterminer grâce à la condition initiale $V(0)=1000$.

Or, $V(0) = 1000 \iff -0.25 \times 0^2 + k = 1000 \iff k = 1000$.
On retrouve bien $V(t) = -\dfrac{1}{4}t^2 + 1000$.

5. **a.** Il est évident que $D(0) = 0$

   b. D est une primitive de V donc on sait que $D(t) = -0.25\dfrac{t^3}{3} + 1000t + k$ où k est une constante à déterminer grâce à la condition initiale $D(0) = 0$.
   Or $D(0) = -\dfrac{0.25}{3} \times 0 + 1000 \times 0 + k = k$.   Donc $k = 0$ et $D(t) = -0.25\dfrac{t^3}{3} + 1000t$

6. $V(t) = 0 \iff -\dfrac{1}{4}t^2 + 1000 = 0 \iff -\dfrac{1}{4}t^2 = -1000 \iff t^2 = 4000 \overset{t>0}{\iff} t = \sqrt{4000} \simeq 63.24$
   Il s'agit que temps mis par le TGV pour s'arrêter après le coup de frein.

7. On cherche donc $D(\sqrt{4000}) = -0.25\dfrac{\sqrt{4000}^3}{3} + 1000\sqrt{4000} \simeq 42\,164$ m

Exercice 3 : (6 points)

1. On sait que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.
   Suivant les énoncés on a donc $F'(4) = f(4) = 6$ ou $F'(3) = f(3) = 2$

2.

x	$-\infty$		-4		0		2		$+\infty$
signe de $f(x) = F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de F		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3.

4. D'après le tableau de variations établi, on peut clairement éliminer
   - ⇝ pour la version A : les courbes 1 et 3. La courbe 2 peut donc représenter F
   - ⇝ pour la version B : les courbes 2 et 3. La courbe 1 peut donc représenter F

Exercice 4 : (12 points)

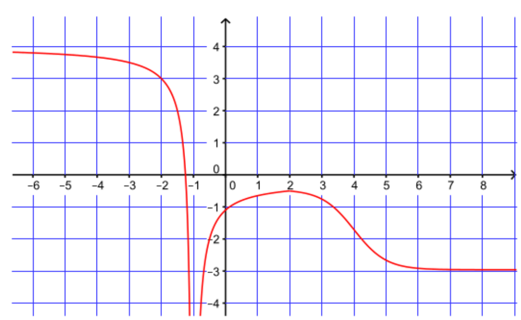
1. $y = 3x - 4$

2. $-\dfrac{2}{3}$

3. $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-3)^3}$
   et « f est strictement décroissante sur $[5;6]$ »

4. $\dfrac{1}{10}(2x+3)^5$

5. « g est une primitive de f »
   et « f est la dérivée de h »



6.

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

8. $y = -3$ et $x = -1$