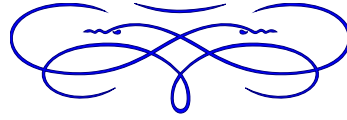


Les nombres réels – Feuille d'exercices

**Exercice 1.****Des écritures différentes pour un même nombre**

Considérons $a = 0,9999\dots = 0,9$. Le but de l'exercice est de démontrer que a et 1 sont **exactement** le même nombre. Ce résultat est particulièrement contre intuitif.

1. Démontrer que :

$$10a = 9 + a$$

2. Résoudre l'équation $10a = 9 + a$ puis conclure.

Exercice 2.

1. Effectuer les quatre opérations suivantes en moins de 20 secondes chacune :

$$3 + \frac{1}{4}$$

$$5 \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{7}$$

2. Compléter les égalités manquantes en moins de 30 secondes chacune.

$$4 + \dots = 2 \times 6$$

$$5 - \dots = -2 \times (-3)$$

$$2 + 3 \times \dots = 4$$

$$2x + 5 = x - 2 + \dots$$

3. Répondre à chaque problème posé en moins d'une minute chacun.

— Dans une classe de seconde, il y a 15 garçons et 20 filles. Les deux-tiers des garçons et le quart des filles sont demi-pensionnaires. Combien y-a-t-il d'élèves de cette classe demi-pensionnaires ?

— Dans un triangle rectangle en C , le côté $[AB]$ mesure 6 cm, le côté $[BC]$ mesure 5 cm. Donner la valeur exacte de la longueur du côté $[AC]$.

Exercice 3.**Somme et différence**

Trouver deux nombres entiers dont la somme vaut 281 et dont la différence vaut 111.

Exercice 4.**Division euclidienne**

La somme de deux entiers naturels x et y est 157. Dans la division euclidienne de x par y , le quotient vaut 6 et le reste 17. Déterminer x et y .

Exercice 5.

1. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible :

(a) $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$

(c) $\frac{1}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{1}{5}}$

(d) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 2}}}$

2. (a) La somme des inverses de deux nombres est-elle égale à l'inverse de la somme de ces deux nombres ?

- (b) La différence des inverses de deux nombres est-elle égale à l'inverse de la différence de ces deux nombres ?

Exercice 6. On donne $\sqrt{2} \approx 1.41$ et $\sqrt{3} \approx 1.73$.

Ordre de grandeur, sans calculatrice

1. Pouvez-vous donner facilement (et sans calculatrice) un ordre de grandeur des valeurs suivantes ?

$$A = \sqrt{72} + \sqrt{32} - 6\sqrt{8} \qquad B = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad C = \frac{1}{1 + \sqrt{3}}$$

2. (a) Ecrire A en fonction de $\sqrt{2}$. En déduire un ordre de grandeur de A .
 (b) Ecrire B sous la forme d'une fraction de dénominateur 2. En déduire un ordre de grandeur de B .

(c) Montrer que $C = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. En déduire un ordre de grandeur de C .

3. Déterminer un ordre de grandeur des valeurs suivantes, après avoir changé leur écriture :

$$D = \sqrt{2} \times \sqrt{54} \qquad E = \sqrt{\frac{4}{3}} \qquad F = \frac{2}{1 - \sqrt{3}} \qquad G = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}$$

4. **Application** : Un triangle rectangle isocèle a son hypoténuse qui mesure 10 cm. Déterminer un ordre de grandeur de la longueur des deux autres côtés

Exercice 7. Tracer un segment d'une longueur quelconque, à l'aide uniquement de la règle non graduée et du compas, diviser ce segment en trois segments égaux. Expliquer votre démarche.

Exercice 8.

1. Calculer $(3\sqrt{5} - 4)^2$ et $(2\sqrt{6} - 5)^2$
 2. En déduire une autre écriture de $\sqrt{61 - 24\sqrt{5}}$ et $\sqrt{49 - 20\sqrt{6}}$

Exercice 9.

Sans calculatrice

Le but de cet exercice est de calculer le nombre suivant sans calculatrice :

$$A = 83\,875\,683\,470^2 - 83\,875\,683\,469 \times 83\,875\,683\,471$$

1. On pose $a = 83\,875\,683\,470$. Exprimer A en fonction de a , puis en simplifiant déterminer A .
 2. Conclure.

Exercice 10. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On pose :

$$a = \frac{p+1}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{p-1}{2}$$

1. Donner la liste des 10 plus petits nombres premiers.
 2. Justifier que a et b sont des nombres entiers.
 3. Calculer $a^2 - b^2$ en fonction de p .
 4. En déduire que tout nombre premier $p \geq 3$ peut s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers.
 Donner cette différence pour $p = 29$.

Exercice 11. On souhaite démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire sous forme de fraction.

Principe (raisonnement par l'absurde) : On va supposer qu'au contraire on peut écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction irréductible puis démontrer que cette supposition implique une contradiction.

Supposons donc qu'il existe deux nombres entiers p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

1. Montrer que l'on a $2q^2 = p^2$.
2. Démontrer qu'il est impossible que p soit impair.
3. (a) Démontrer que si p est pair alors q^2 est pair.
(b) En déduire que q est pair.
(c) En déduire une contradiction.
4. Conclure.

Exercice 12. Démontrer que la somme de deux nombres rationnels est encore un nombre rationnel. Qu'en est-il de la somme de deux nombres irrationnels ?

Exercice 13. Un triangle a des côtés qui mesurent $x + 4$ cm, x cm et 9 cm.

Le côté de $x + 4$ cm est le côté le plus long.

Déterminer x pour que ce triangle soit un triangle rectangle.

Exercice 14. La somme de cinq nombres entiers consécutifs vaut 1515. Déterminer ces cinq nombres.

Exercice 15. Pour assister à un match de foot, un groupe de 21 personnes a payé 90 euros de plus qu'un groupe de 12 personnes.

Sachant que toutes les places sont au même prix, quel est le prix, en euros, d'une place

Exercice 16. À ce jour, l'âge du capitaine est le double de celui de Fred. Dans 5 ans, ils auront à eux deux 70 ans. Quel est l'âge du capitaine ?

Exercice 17. La somme de trois nombres pairs consécutifs est égale à 378. Quels sont ces trois nombres ?

Exercice 18. Dans une classe de 3e, deux septièmes des élèves apprennent l'allemand, la moitié des élèves apprennent l'espagnol, et les six restants apprennent l'italien.

Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Exercice 19. j'ai deux fois l'âge que vous aviez lorsque j'avais l'âge que vous avez. Lorsque vous aurez mon âge, nous aurons à nous deux 63 ans. quel est mon âge ?

Exercice 20. Traduire les propositions mathématiques en français puis dire si elles sont vraies ou fausses :

\forall signifie pour tout ou quelque soit ; \exists signifie il existe.

1. $\forall x \in \mathbb{Z}$ alors $x > 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x^2 \in \mathbb{N}$ alors $x \in \mathbb{N}$.
3. Si $x \in \mathbb{R}$ alors $x^2 \geq 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{Q}$ et $\forall y \in \mathbb{N}$ alors $x + y \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. Traduire les propositions écrites en français en langage mathématiques dans le cas où elles sont vraies, dans le cas contraire corriger ses propositions et les écrire en langage mathématiques :

1. Quelque soit le nombre réel x alors il existe un nombre réel y tel que $x + y = 0$.
2. Quelque soit le nombre réel x alors il existe un nombre réel y tel que $x \times y = 1$.

3. Soit x un nombre réel strictement supérieur à 2 alors $2 - x$ est strictement supérieur à 0.
4. L'ensemble des nombres premiers \mathbb{P} est contenu dans l'ensemble des nombres rationnels.

Exercice 22.

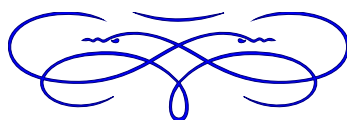
1. Supposons que $x \in [1;5]$ et $y \in [2;7]$. Encadrer xy , $x + y$, $x - y$ et $\frac{x}{y}$.
2. Dans chacun des cas suivants donner l'intervalle dans lequel se situe le nombre x :

(a) $2 \leq 2x + 3 \leq 7$	(c) $-4x + \frac{1}{2} > \frac{7}{3}$	(e) $-1 \leq -x + 1 < 8$
(b) $-3x + 1 \leq 7$	(d) $x(x + 2) < x^2$	(f) $x^2 > 4$

QCM

Lycée Jean Durand

Les nombres réels – QCM



1. Parmi les nombres suivants, lequel est irrationnel ?

(a) $(\sqrt{18} + \sqrt{8})^2$	(b) $(\sqrt{18} + \sqrt{5})^2$	(c) $\sqrt{5^2 - 3^2}$	(d) $\frac{1}{3}$
--------------------------------	--------------------------------	------------------------	-------------------
2. Parmi les fractions suivantes, laquelle est un nombre décimal ?

(a) $\frac{17}{99}$	(b) $\frac{49}{99}$	(c) $\frac{17}{98}$	(d) $\frac{49}{98}$
---------------------	---------------------	---------------------	---------------------
3. Lequel de ces nombres est rationnel et non décimal ?

(a) 6×10^{-4} .	(b) $\sqrt{0,49}$	(c) 1,732	(d) $\frac{1}{3 \times 10^2}$
--------------------------	-------------------	-----------	-------------------------------
4. Lequel de ces nombres n'est pas entier ?

(a) $\frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{13}}$	(b) $\frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{4}$	(c) $\frac{(\sqrt{2})^4}{4}$	(d) $(1 + \sqrt{2})^2 - 3$
------------------------------------	----------------------------------	------------------------------	----------------------------
5. Le nombre $(\sqrt{18} - \sqrt{11})(\sqrt{18} + \sqrt{11})$ est :

(a) premier.	(b) négatif.	(c) irrationnel.	(d) égal à $2\sqrt{18}$.
--------------	--------------	------------------	---------------------------

