

Chapitre 4

Racine Carrée et Valeur Absolue



Hors Sujet



Titre : « The Wire »

Auteur : DAVID SIMON

Présentation succincte de l'auteur : Mommy est un film dramatique québécois écrit et réalisé par Xavier Dolan, sorti en 2014.

Il est présenté en compétition officielle au festival de Cannes 2014 où il remporte le Prix du jury¹. Dolan, pour sa première participation en compétition (et quatrième sélection au festival) est à 25 ans le plus jeune réalisateur de la sélection. Dans l'histoire du festival, il est le second plus jeune réalisateur à recevoir le Prix du jury, la première étant l'Irannienne Samira Makhmalbaf, récompensée à 20 ans pour Le Tableau noir en 2002.

Comme dans le clip College Boy réalisé par Dolan en 2013, le film a la particularité d'être en majorité tourné en format d'image carré 1 :1,3,4. Mommy a été sélectionné pour représenter le Canada à l'Oscar du meilleur film en langue étrangère lors de la 87^e cérémonie des Oscars en 2015⁵

Document réalisé à l'aide de L^AT_EX

Auteur : D. Zancanaro

Site : wicky-math.fr/nf

Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

I. Variation de fonction	1
I.1. Définition	1
I.2. Application aux fonctions affines	2
II. Racine Carrée	3
II.1. Définition	3
II.2. Relation entre le carré et la racine carrée	3
II.3. Variations de la fonction racine carrée	4
II.4. Variations de $x \mapsto \sqrt{ax+b}$	5
II.5. Vers la valeur absolue	5
III. Valeur absolue	6
III.1. Définition	6
III.2. Résolution d'équation	7
III.3. Résolution d'inéquation	8
III.4. Valeur absolue et suite convergente	9

L'essentiel :

- ↪ Se repérer sur le cercle trigonométrique
- ↪ Connaître l'allure de la représentation graphique des fonctions racines carrées et valeur absolue
- ↪ Résoudre des équations et inéquations avec la valeur absolue
- ↪ Déterminer les variations de fonctions en utilisant les fonctions de référence.

Leçon 4

Racine Carrée et Valeur Absolue



Au fil du temps

I. Variation de fonction

I.1. Définition

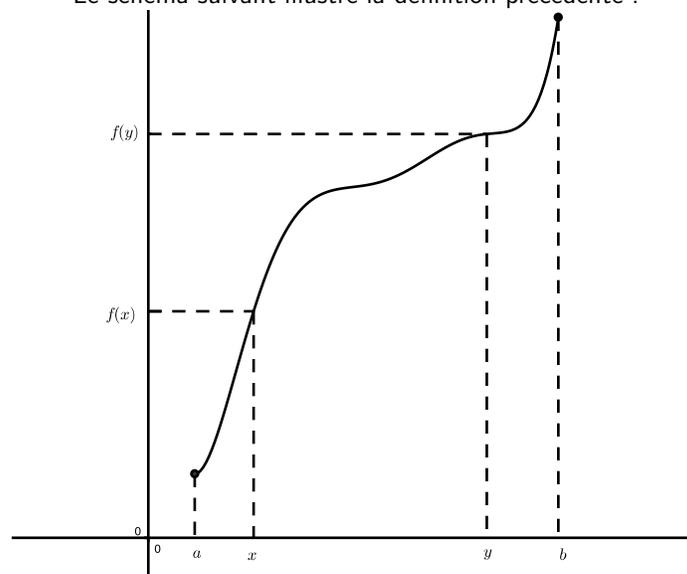


Définition 1.

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite strictement croissante sur I si et seulement si les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre sur I c'est-à-dire f est strictement croissante sur I si et seulement si f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) < f(y)$$

Le schéma suivant illustre la définition précédente :

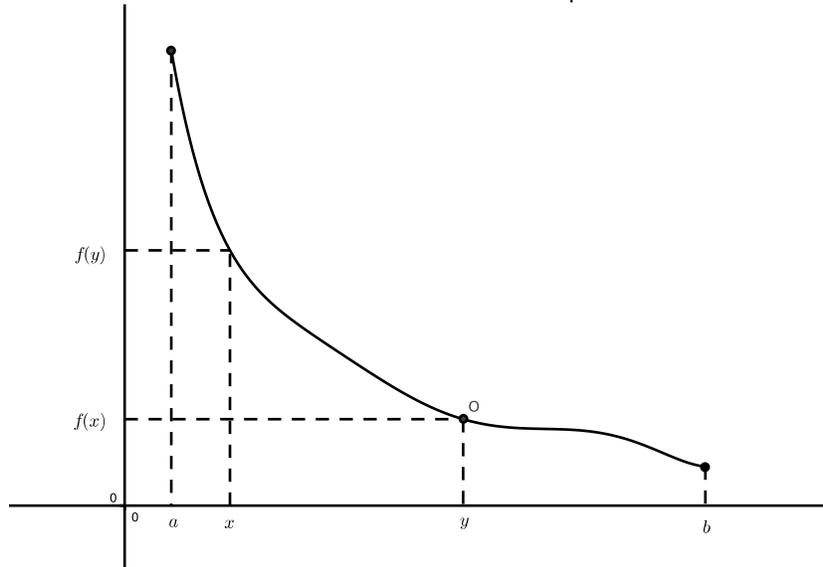


**Définition 2.**

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite strictement décroissante sur I si et seulement si les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse sur I c'est-à-dire f est strictement croissante sur I si et seulement si f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f(x) > f(y)$$

Le schéma suivant illustre la définition précédente :



Remarque : On parle de fonctions croissante ou de fonction décroissante uniquement sur un intervalle.

1.2. Application aux fonctions affines

On considère une fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$.

Soit x et y deux antécédents tels que $x > y$; dans ce cas :

$$f(x) - f(y) = ax + b - (ay + b) = ax + b - ay - b = a(x - y)$$

Puisque $x > y$ on obtient $x - y > 0$. Distinguons trois cas :

- ↪ Si $a > 0$ alors $a(x - y) > 0$ donc $f(x) - f(y) > 0 \iff f(x) > f(y)$. Nous venons de démontrer que si $x > y$ alors $f(x) > f(y)$; autrement dit f vérifie la propriété des fonctions croissante sur \mathbb{R}
- ↪ Si $a < 0$ alors $a(x - y) < 0$ donc $f(x) - f(y) < 0 \iff f(x) < f(y)$. Nous venons de démontrer que si $x > y$ alors $f(x) < f(y)$; autrement dit f vérifie la propriété des fonctions décroissante sur \mathbb{R}
- ↪ Si $a = 0$ alors $a(x - y) = 0$ donc $f(x) = f(y)$ ce qui montre que f est une fonction constante sur \mathbb{R}

**Propriété 1.**

Soit f une fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$.

f est strictement croissante sur \mathbb{R} si et seulement si $a > 0$; f est strictement décroissante sur \mathbb{R} si et seulement si $a < 0$.

**Exemple :**

Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = -2x + 1$. D'après la propriété précédente f est strictement croissante sur \mathbb{R} puisque $a = 3 > 0$ et g est strictement décroissante sur \mathbb{R} puisque $a = -2 < 0$.

II. Racine Carrée

II.1. Définition



Définition 3.

Soit a un nombre réel positif alors l'unique nombre positif dont le carré vaut a est appelé racine carrée de a et on le note \sqrt{a} . On obtient donc immédiatement :

$$1. \sqrt{a} \geq 0$$

$$2. a \geq 0$$

$$3. \sqrt{a^2} = a$$



Exemple :

$\sqrt{9} = 3$ puisque $3 \times 3 = 9$. $\sqrt{2} \approx 1,41$ puisque $1,41 \times 1,41 \approx 2$.

Remarque : Le carré d'un nombre étant toujours positif, il n'existe pas de nombre réel qui élevé au carré donne un nombre négatif ; par conséquent la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas (du moins dans \mathbb{R}).



Définition 4.

La fonction qui à tout réel positif x associe le réel \sqrt{x} est appelé fonction racine carrée. Elle est définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \sqrt{x}$



Exemple :

L'image de 2 par cette fonction f vaut $f(2) = \sqrt{2} \approx 1,41$. De plus tout nombre réel positif y admet un unique antécédent par f :

$$f(x) = y \iff \sqrt{x} = y \implies \sqrt{x^2} = y^2 \implies x = y^2$$

Par exemple l'antécédent de 3 est $3^2 = 9$ puisque $\sqrt{9} = 3$

II.2. Relation entre le carré et la racine carrée

Soit x un nombre réel positif, l'image de x par la fonction racine carrée est \sqrt{x} et l'image de \sqrt{x} par la fonction carrée est $\sqrt{x}^2 = x$. Ainsi l'élevation au carré est le processus réciproque de la racine carrée.

On dit que la fonction racine carrée est la fonction réciproque de la fonction carrée sur \mathbb{R}^+ ; mais quelle(s) relation(s) cela implique-t-il entre ces deux fonctions ?

Les points suivants appartiennent tous à la représentation graphique de la fonction carrée :

$$(0;0) \quad (1;1) \quad (2;4) \quad (3;9) \quad (\sqrt{2};2)$$

et les points suivants appartiennent eux à la représentation graphique de la fonction racine carrée :

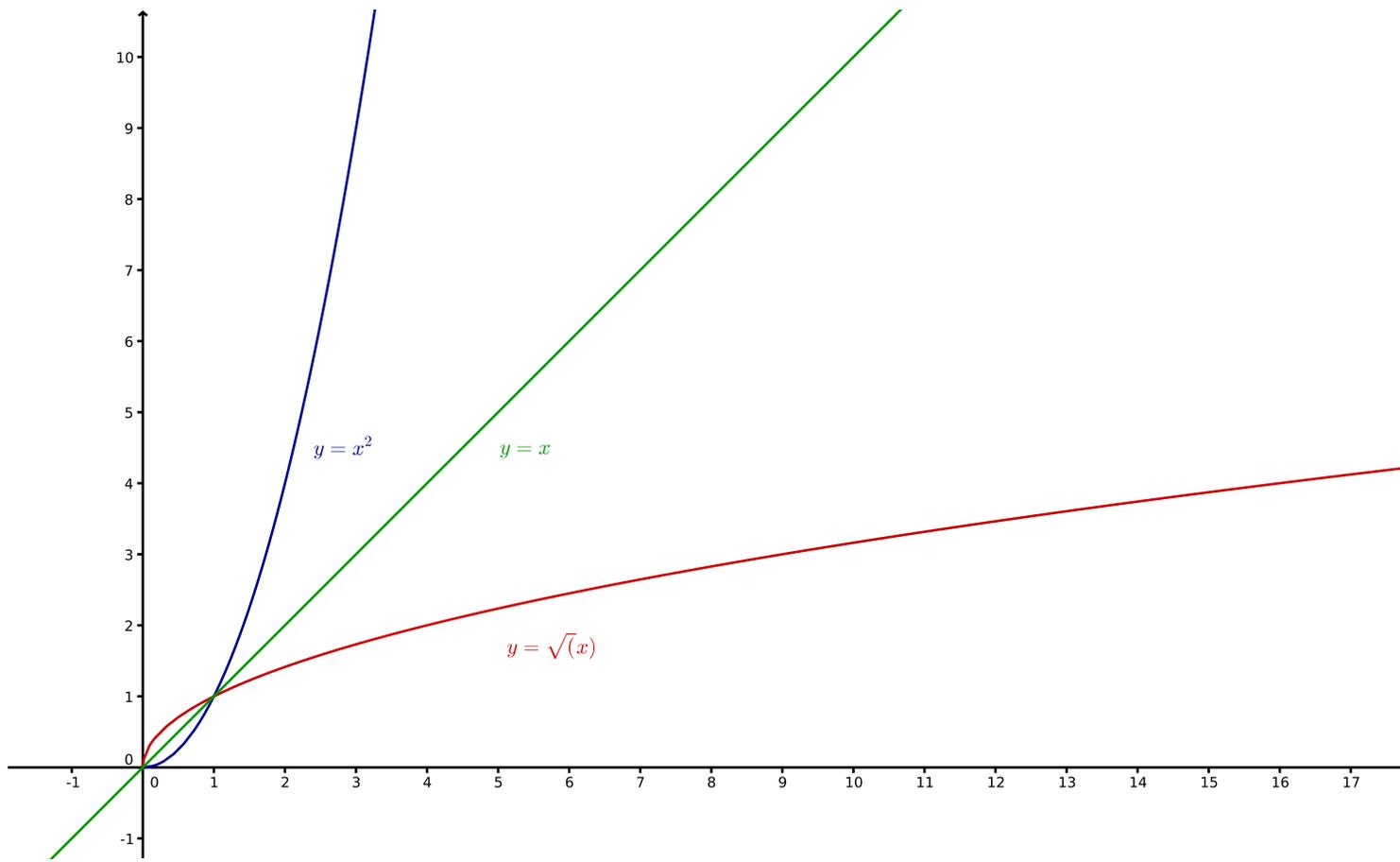
$$(0;0) \quad (1;1) \quad (2;\sqrt{2}) \quad (4;2) \quad (9;3)$$

Pour passer des points de la représentation graphique de la fonction carrée à ceux de la fonction racine carrée il suffit d'échanger les abscisses et les ordonnées ce qui implique que :



Propriété 2.

Soit \mathcal{C} la représentation graphique de la fonction carrée et \mathcal{C}' la représentation graphique de la fonction racine carrée dans un repère alors \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



De la symétrie entre les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' sur l'intervalle \mathbb{R}^+ on déduit immédiatement la propriété suivante :

Propriété 3.

1. Si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x\sqrt{x}$;
2. Si $x > 1$ alors $\sqrt{x} < x < x^2$

Exemple :

Pour $x = 0,5$ on a $\sqrt{0,5} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$ et $x^2 = 0,5 \times 0,5 = 0,25$. On retrouve bien $x^2 < x < \sqrt{x}$.

II.3. Variations de la fonction racine carrée

Théorème 1.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

 **Preuve**

Considérons deux réels x et y positifs tels que $x > y \iff x - y > 0$ alors :

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

D'une part $x - y > 0$ et d'autre part $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$ donc $\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0$ donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} > 0 \iff \sqrt{x} > \sqrt{y}$; on vient de démontrer que sur \mathbb{R}^+ :

$$x > y \implies \sqrt{x} > \sqrt{y}$$

La fonction racine carrée vérifie donc la propriété des fonctions croissantes sur \mathbb{R}^+ .

II.4. Variations de $x \mapsto \sqrt{ax + b}$

 **Propriété 4.**

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et g une fonction définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

Si f est strictement (dé)croissante sur \mathbb{R} alors g est strictement (dé)croissante sur son ensemble de définition.

 **Preuve**

Démontrons cette propriété dans le cas où f est strictement décroissante sur \mathbb{R} :

Soit x et y deux antécédents dans D_g (l'ensemble de définition de g) tels que $x > y$ alors $f(x) < f(y)$ puisque f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Enfin $\sqrt{f(x)} < \sqrt{f(y)}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

Au final on a démontré que si $x > y$ alors $g(x) < g(y)$ ce qui montre que g est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

 **Exemple :**

Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{3x - 4}$.

Tout d'abord g est définie lorsque $3x - 4 \geq 0 \iff x \geq \frac{4}{3}$; donc g est définie sur l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$.

Enfin la fonction affine f définie par $f(x) = 3x - 4$ est croissante sur \mathbb{R} puisque $3 > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$.

II.5. Vers la valeur absolue

Par définition on sait que pour $x \geq 0$ on a $\sqrt{x^2} = x$. Mais qu'en est-il de $\sqrt{x^2}$?

Cette fois puisqu'un carré est toujours positif on peut calculer $\sqrt{x^2}$ même pour des valeurs de x négative.

Par exemple

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Contre toute attente :

$$\forall x < 0, \quad \sqrt{x^2} \neq x$$

D'une manière générale on a $\sqrt{x^2} = \pm x$; plus précisément $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geq 0$ et $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$. Systématiquement $\sqrt{x^2}$ donne « la valeur positive de x ».

**Définition 5.**

On appelle valeur absolue du réel x le nombre noté $|x|$ et définie par :

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

**Exemple :**

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ et } |5| = \sqrt{5^2} = \sqrt{5} = 5$$

III. Valeur absolue

III.1. Définition

**Définition 6.**

La fonction qui à tout réel x associe le réel $|x|$ est appelée fonction valeur absolue

**Exemple :**

Cherchons les antécédents de 5 par cette fonction.

Pour cela on doit résoudre l'équation $|x| = 5$ ce qui équivaut à :

$$\sqrt{x^2} = 5 \iff x^2 = 25 \iff x = \pm 5$$

Il existe donc deux nombres dont la valeur absolue vaut 5, il s'agit de 5 et -5 .

Cherchons les antécédents de -7 par cette fonction. On doit résoudre l'équation $\sqrt{x^2} = -7$. Puisque la racine carrée d'un nombre donne toujours un résultat positif, cette dernière équation n'admet pas de solution. Par conséquent il n'existe aucun nombre réel dont la valeur absolue vaut -7 .

Comme souvent en mathématiques il existe différentes manières de définir la valeur absolue, toute équivalentes bien entendu, en voici deux autres :

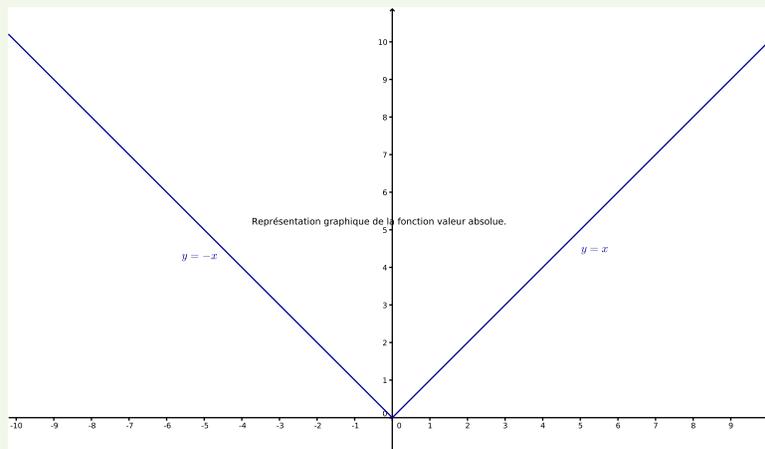
**Définition 7.**

Soit x un nombre réel alors :

$$1. |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2. $|x| = d(0, x)$ où $d(0, x)$ est la distance entre 0 et x , une fois x placé sur l'axe des abscisses.

En utilisant la première des deux définitions précédentes on déduit que la représentation graphique de la fonction valeur absolue est la réunion des demi-droites d'équation $y = -x$ sur \mathbb{R}^- et $y = x$ sur \mathbb{R}^+ ce qui donne :

**Propriété 5.**

On considère deux nombres réels x et y alors la distance qui sépare x de y est noté $d(x; y)$ et vaut :

$$d(x; y) = |x - y|$$

**Preuve**

Distinguons deux cas :

Si $x \geq y$ alors $d(x; y) = x - y$ et $|x - y| = \sqrt{(x - y)^2} = x - y$ puisque $x - y \geq 0$.

On vient donc de démontrer que si $x \geq y$ alors $d(x; y) = |x - y|$

Si $y \geq x$ alors $d(x; y) = y - x$ et $|x - y| = \sqrt{(x - y)^2} = -(x - y) = y - x$ puisque $x - y \leq 0$.

On vient donc de démontrer que si $y \geq x$ alors $d(x; y) = |x - y|$.

Par conséquent dans tous les cas on a $d(x; y) = |x - y|$.

Exercice 1. Un chien errant a été signalé sur une autoroute à moins de 3 km de la borne kilométrique 50, mais à plus de 5 km de la borne 54. On appelle x le réel qui repère la position du chien sur l'autoroute.

- Traduire l'énoncé en utilisant des valeurs absolues.
- Entre quelles bornes kilométriques de l'autoroute ce chien peut-il se trouver ?

III.2. Résolution d'équation**Propriété 6.**

Soit x un réel et $a \geq 0$ alors $|x| = a \iff x = \pm a$

 **Preuve**

l'équation $|x| = a$ qui équivaut à :

$$\sqrt{x^2} = a \iff x^2 = a^2 \iff x = \pm a$$

 **Exemple :**

Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations :

1. $|2x| = 1$

2. $|5 - x| = 2$

3. $|-7x + 5| = 3$

III.3. Résolution d'inéquation

 **Propriété 7.**

Soit x un réel et $a \geq 0$ alors $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

 **Preuve**

l'équation $|x| \leq a$ qui équivaut à :

$$\sqrt{x^2} \leq a \iff x^2 \leq a^2 \iff x^2 - a^2 \leq 0 \iff (x - a)(x + a) \leq 0$$

On conclut en utilisant un tableau de signe.

 **Exemple :**

Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations :

1. $|2x| \leq 6$

2. $|5 - x| \leq 7$

3. $|-7x + 5| \leq 8$

 **Propriété 8.**

Soit x un réel et $a \geq 0$ alors $|x| \geq a \iff x < -a$ ou $x > a$

 **Preuve**

l'équation $|x| \geq a$ qui équivaut à :

$$\sqrt{x^2} \geq a \iff x^2 \geq a^2 \iff x^2 - a^2 \geq 0 \iff (x - a)(x + a) \geq 0$$

On conclut en utilisant un tableau de signe.

 **Exemple :**

Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations :

1. $|2x| \geq 4$

2. $|5 - x| \geq 5$

3. $|-7x + 5| \geq -8$

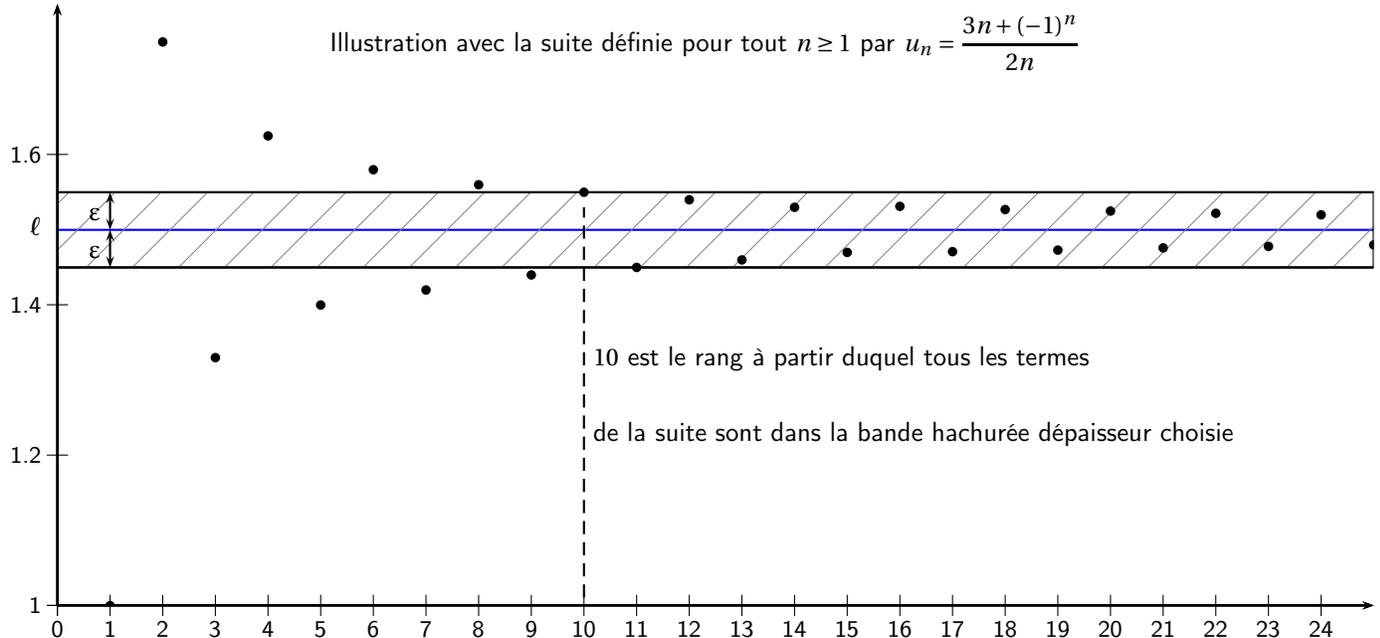
III.4. Valeur absolue et suite convergente

Il est désormais possible de donner la définition mathématiques pour caractériser la convergence d'une suite vers un réel ℓ .

Observons le graphique suivant où l'on a placé les premiers termes de la suite définie par :

$$u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n}$$

 Exemple :



↪ Le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{3}{2}$

↪ Ici on a choisi $\epsilon = 0.05$ et on a trouvé que tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]1.45; 1.55[$ pour $n \geq 10$.

ce qui se traduit par :

$$\forall n \geq 10 \quad \text{alors} \quad \ell - 0,05 < u_n < \ell + 0,05$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 10 \quad \text{alors} \quad -0,05 < u_n - \ell < 0,05 \iff |u_n - \ell| < 0,05$$

↪ Si on avait choisi $\epsilon = 0.1$, on aurait trouvé que pour $N = 5$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.4; 1.6[$ pour $n \geq 5$.

↪ Si on avait choisi $\epsilon = 0.04$, on aurait trouvé que pour $N = 13$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.46; 1.54[$ pour $n \geq 13$.

D'une manière générale quelque soit la largeur de la bande ϵ , il existe un rang N à partir duquel on a $|u_n - \ell| \leq \epsilon$
 Cette propriété caractérise les suites convergentes :



Définition 8.

Soit (u_n) une suite.

La suite u converge vers un réel ℓ si et seulement si quelque soit le nombre positif ϵ , il existe un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \epsilon$

 **Exemple :**

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = 4 + \frac{1}{n}$$

. Il semble naturel de conjecturer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$$

Démonstrons le.

Soit ϵ un nombre réel positif. Pour cela il s'agit de prouver qu'à partir d'un certain rang n (nous partons à sa recherche) on a :

$$|u_n - 4| \leq \epsilon$$

On a :

$$|u_n - 4| \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq u_n - 4 \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq 4 + \frac{1}{n} - 4 \leq \epsilon \iff -\epsilon \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

Puisque n désigne un entier naturel on a toujours $\frac{1}{n} > 0$ et donc on a toujours $\frac{1}{n} > -\epsilon$, par conséquent :

$$-\epsilon \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon \iff \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

On passe à l'inverse :

$$\frac{1}{n} \leq \epsilon \iff n \geq \frac{1}{\epsilon}$$

Nous venons de démontrer que pour tous les entiers supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$ alors $|u_n - 4| \leq \epsilon$ ce qui prouve donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$$

Cette démonstration est délicate, prenons le temps de regarder quelques exemples :

↪ Si $\epsilon = 0,001$ alors $\frac{1}{\epsilon} = 1000$, nous avons prouvé que pour tout entier $n \geq 1000$ l'écart entre u_n et 4 est inférieur à 0,001. En effet :

$$u_{1000} = 4 - \frac{1}{1000} = 3,999$$

↪ Si $\epsilon = 0,00001$ alors $\frac{1}{\epsilon} = 100000$, nous avons prouvé que pour tout entier $n \geq 100000$ l'écart entre u_n et 4 est inférieur à 0,00001. En effet :

$$u_{100000} = 4 - \frac{1}{100000} = 3,99999$$