Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (10 points)

On considère les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 7-3n \quad ; \quad v_n = n^2-3n+1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = 2\sqrt{w_n}+2 \end{cases}$$

1. (a) Calculer u_0 ; u_1 et u_7

   $u_0 = 7-3\times 0 = 7$, $u_1 = 7-3 = 4$ et $u_7 = 7-3\times 7 = 7-21 = -14$.

   (b) Etudier les variations de la suite u.

   Etudions le signe de la différence entre deux termes successifs quelconque :

   $$u_{n+1}-u_n = 7-3(n+1)-(7-3n) = 7-3n-3-7+3n = -3 < 0$$

   On vient de démontrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n < 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$$

   Par conséquent la suite u est décroissante.

   (c) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < -100$.

   $$u_n < -100 \Longleftrightarrow 7-3n < -100 \Longleftrightarrow -3n < -107 \Longleftrightarrow n > \frac{-107}{-3} \simeq 35,3$$

   Ainsi le plus petit entier naturel n tel que $u_n < -100$ est $n = 36$.

   (d) Que peut-on conjecturer quant à la limite de la suite u ?

   On peut penser que :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a :

   $$v_{n+1}-v_n = 2n-2$$

   Pour tout entier naturel n on a :

   $$v_{n+1}-v_n = (n+1)^2-3(n+1)+1-(n^2-3n+1) = n^2+2n+1-3n-3+1-n^2+3n-1 = 2n-2$$

   (b) En déduire qu'à partir de $n = 1$ la suite v est croissante.

   v est croissante si et seulement si

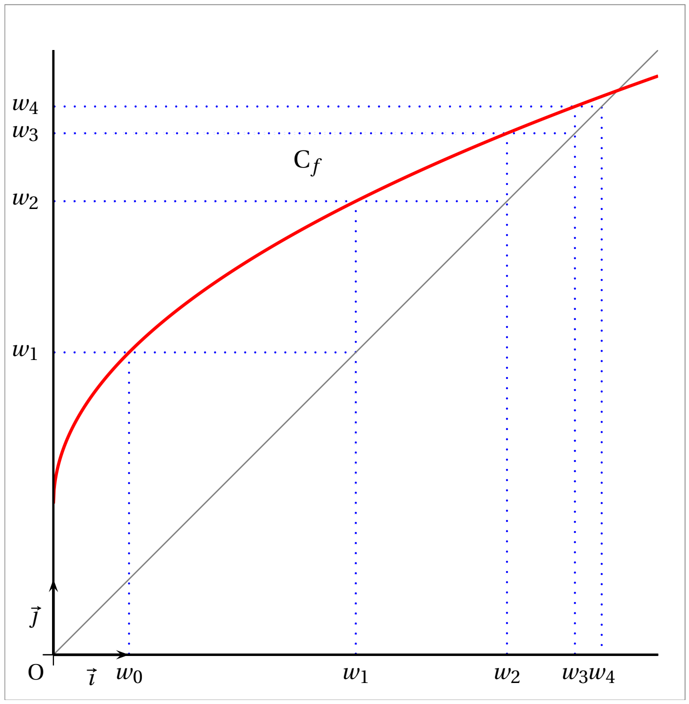
   $$v_{n+1}-v_n \geq 0 \Longleftrightarrow 2n-2 \geq 0 \Longleftrightarrow 2n \geq 2 \Longleftrightarrow n \geq 1$$

   v est donc croissante à partir de $n = 1$.

3. (a) Calculer w_1 et w_2.

   $w_1 = 2\sqrt{w_0}+2 = 2\sqrt{1}+2 = 4$ et $w_2 = 2\sqrt{w_1}+2 = 2\sqrt{4}+2 = 6$

   (b) On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{x}+2$ et la droite d'équation $y = x$. Placer sur l'axe des abscisses, en s'aidant du graphique, les termes w_0 ; w_1 ; w_2 ; w_3 et w_4.



(c) Conjecturer le sens de variation de la suite w ainsi que la limite de la suite w.

Sur le graphique il apparait que w_0, w_1, w_2, w_3 et w_4 sont rangés dans l'ordre croissante, nous pouvons raisonnablement conjecturer que w est croissante.

Les termes de la suites w se rapproche de l'abscisse du point d'intersection de la représentation graphique de f avec la droite d'équation $y = x$ d'où la conjecture suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n \simeq 7,5$$

(d) **Bonus** : Retrouver la limite de la suite w par le calcul.

Nous cherchons donc le réel x vérifiant $f(x) = x$ c'est-à-dire la solution de l'équation :

$$2\sqrt{x}+2 = x \iff 2\sqrt{x} = x-2 \implies (2\sqrt{x})^2 = (x-2)^2 \implies 4x = x^2-4x+4 \iff x^2-8x+4 = 0$$

Le discriminant de ce trinôme vaut :

$$\Delta = 64-4\times1\times4 = 64-16 = 48$$

Et donc l'équation $x^2-6x+4 = 0$ admet deux solutions :

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8\pm\sqrt{48}}{2}$$

Or, $\dfrac{8-\sqrt{48}}{2} < 1$ n'est pas solution du problème puisque les termes de la suite w sont très clairement tous supérieur à 1 donc la suite w converge vers $\dfrac{8+\sqrt{48}}{2} = 4+\sqrt{12} = 4+2\sqrt{3} \simeq 7,5$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (10 points)

On considère les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = -7+3n \quad ; \quad v_n = 1-n^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_0 = 7 \\ w_{n+1} = -\dfrac{2}{3}w_n - 1 \end{cases}$$

1. (a) Calculer u_0 ; u_1 et u_7

   $u_0 = -7+3\times 0 = -7$, $u_1 = -7+3 = -4$ et $u_7 = -7+3\times 7 = -7+21 = 14$.

   (b) Etudier les variations de la suite u.

   Etudions le signe de la différence entre deux termes successifs quelconque :

$$u_{n+1} - u_n = -7+3(n+1) - (-7+3n) = -7+3n+3+7-3n = 3 > 0$$

   On vient de démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$$

   Par conséquent la suite u est croissante.

   (c) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 100$.

$$u_n > 100 \Longleftrightarrow -7+3n > 100 \Longleftrightarrow 3n > 107 \Longleftrightarrow n > \frac{107}{3} \simeq 35,3$$

   Ainsi le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100$ est $n = 36$.

   (d) Que peut-on conjecturer quant à la limite de la suite u ?

   On peut penser que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} - v_n = -2n-1$$

   Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} - v_n = 1-(n+1)^2 - \left(1-n^2\right) = 1-(n^2+2n+1) - 1 + n^2 = 1-n^2-2n-1-1+n^2 = -2n-1$$

   (b) En déduire que la suite v est décroissante.

   v est décroissante si et seulement si $v_{n+1} - v_n \leq 0$. Or d'après la question précédente :

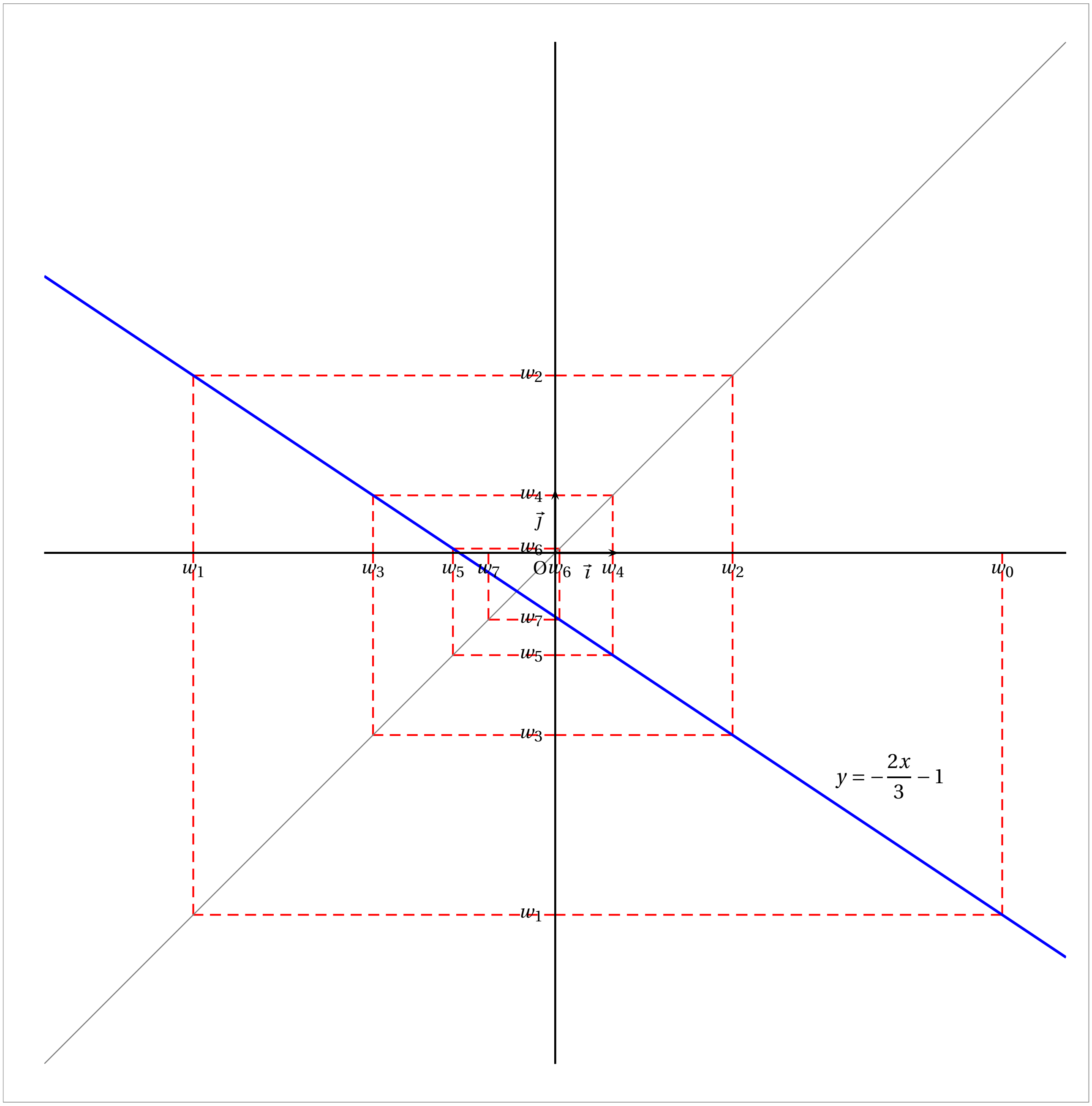
$$v_{n+1} - v_n = -2n-1 < 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   On en déduit que la suite v est décroissante.

3. (a) Calculer w_1 et w_2.

$$w_1 = -\frac{2}{3}w_0 - 1 = -\frac{2}{3}\times 7 - 1 = -\frac{14}{3} - 1 = -\frac{17}{3} \qquad \text{et} \qquad w_2 = -\frac{2}{3}w_1 - 1 = -\frac{2}{3}\times\left(-\frac{17}{3}\right) - 1 = \frac{34}{9} - 1 = \frac{25}{9}$$

   (b) On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{3}x - 1$ et la droite d'équation $y = x$. Placer sur l'axe des abscisses, en s'aidant du graphique, les termes w_0 ; w_1 ; w_2 ; w_3 et w_4.



(c) Conjecturer le sens de variation de la suite w ainsi que la limite de la suite w.

Sur le graphique il apparait que w_0, w_1, w_2, w_3 et w_4 sont rangés ni dans l'ordre croissant ni dans l'ordre décroissant, nous pouvons affirmer que w n'est ni croissante ni décroissante.

Les termes de la suites w se rapproche de l'abscisse du point d'intersection de la représentation graphique de f avec la droite d'équation $y = x$ d'où la conjecture suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n \simeq -0,5$$

(d) **Bonus** : Retrouver la limite de la suite w par le calcul.

Nous cherchons donc le réel x vérifiant $f(x) = x$ c'est-à-dire la solution de l'équation :

$$-\frac{2}{3}x - 1 = x \Longleftrightarrow -1 = x + 2/3x \Longrightarrow -1 = \frac{5}{3}x \Longrightarrow x = -\frac{3}{5} = -0,6$$

donc la suite w converge vers $-0,6$