Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°1

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (6 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $2x^2-5x-9=0$
On détermine le discriminant du trinôme $2x^2-5x-9$:

$$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times 2\times(-9) = 25+72 = 97 > 0$$

Puisque le discriminant est strictement positif l'équation $2x^2-5x-9=0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{97}}{4} = \frac{5-\sqrt{97}}{4} \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{97}}{4}$$

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{5-\sqrt{97}}{4} ; \frac{5+\sqrt{97}}{4}\right\}$$

(b) $-x^2+x-10=0$
On détermine le discriminant du trinôme $-x^2+x-10$:

$$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times(-1)\times(-10) = 1+40 = -39 < 0$$

Puisque le discriminant est strictement négatif l'équation $-x^2+x-10=0$ n'admet pas de solution d'où :

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

(c) $7x^2-3=0 \iff 7x^2=3 \iff x^2=\frac{3}{7} \iff x_1=-\sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{ou} \quad x_2=\sqrt{\frac{3}{7}}$
L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $-x^2+x-10=0$ est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{\frac{3}{7}} ; \sqrt{\frac{3}{7}}\right\}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $2x^2-5x-9 \leq 0$
Le trinôme $2x^2-5x-9$ admet deux racines distinctes qui sont $\frac{5-\sqrt{97}}{4}$ et $\frac{5+\sqrt{97}}{4}$; de plus $a=2>0$ d'où :

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{97}}{4}$		$\frac{5+\sqrt{97}}{4}$		$+\infty$
$2x^2-5x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble $\mathscr{S}$ des réels x qui vérifient $2x^2-5x-9 \leq 0$ est l'intervalle :

$$\mathscr{S} = \left]\frac{5-\sqrt{97}}{4} ; \frac{5+\sqrt{97}}{4}\right[$$

(b) $-x^2+x-10>0$
Le trinôme $-x^2+x-10$ n'admet pas de racines par conséquent il est de signe constant et puisque $a=-1$ on obtient :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2+x-10$		$-$	

On vient de démontrer que quelque soit le réel x on a $-x^2+x-10<0$, ainsi l'inéquation $-x^2+x-10>0$ n'admet aucune solution d'où :

$$\mathscr{S}=\emptyset$$

(c) $7x^2-3\geq 0$

Le trinôme $7x^2-3$ admet deux racines distinctes qui sont $\sqrt{\frac{3}{7}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{7}}$; de plus $a=7>0$ d'où :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{7}}$		$\sqrt{\frac{3}{7}}$		$+\infty$
$7x^2-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble $\mathscr{S}$ des réels x qui vérifient $7x^2-3\geq 0$ est la réunion des intervalles :

$$\mathscr{S}=\left]-\infty;-\sqrt{\frac{3}{7}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{3}{7}};+\infty\right[$$

Exercice 2. (4 points)

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire S = 12 cm^2 et de périmètre P = 16 cm.

Notons x et y les dimensions du rectangle.

Puisque l'aire vaut 12 on a $xy=12$; de plus puisque le périmètre vaut 16, le demi-périmètre vaut 8 ce qui donne $x+y=8\iff y=8-x$. En utilisant la première équation on obtient :

$$x(8-x)=12\iff 8x-x^2=12\iff -x^2+8x-12=0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times(-1)\times(-12)=64-48=16$$

Par conséquent l'équation $-x^2+8x-12=0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8-\sqrt{16}}{-2}=\frac{-12}{-2}=6 \qquad \text{ou} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-\sqrt{16}}{2}=2$$

Lorsque $x=6$ alors $y=8-x=8-6=2$

Lorsque $x=2$ alors $y=8-x=8-2=6$

Dans les deux cas les dimensions du rectangle sont 6 pour la longueur et 2 pour la largeur.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION L'INTERROGATION N°1

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (6 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $2x^2 - 5x + 9 = 0$
   On détermine le discriminant du trinôme $2x^2 - 5x + 9$:
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 9 = 25 - 72 = -47 < 0$$
   Puisque le discriminant est strictement négatif l'équation $2x^2 - 5x + 9 = 0$ n'admet pas de solution :
   $$\mathscr{S} = \emptyset$$
   (b) $-x^2 + 10x - 1 = 0$
   On détermine le discriminant du trinôme $-x^2 + 10x - 1 = 0$:
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 100 - 4 = 96 > 0$$
   Puisque le discriminant est strictement positif l'équation $-x^2 + 10x - 1 = 0$ admet deux solutions distinctes :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{96}}{-2} = \frac{10 + \sqrt{96}}{2} = 5 + 4\sqrt{6} \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 5 - 4\sqrt{6}$$
   $$\mathscr{S} = \{5 - 4\sqrt{6}; 5 + 4\sqrt{6}\}$$
   (c) $7x^2 + 3x = 0 \iff x(7x + 3) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 7x + 3 = 0$
   c'est-à-dire :
   $$x = 0 \quad \text{ou} \quad 7x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{7}$$
   L'équation $7x^2 + 3x = 0$ admet donc deux solutions distinctes :
   $$\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{7}; 0\right\}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   (a) $2x^2 - 5x + 9 \leq 0$
   Le trinôme $2x^2 - 5x + 9$ n'admet pas de racines par conséquent il est de signe constant et puisque $a = 2 > 0$ on obtient :

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 - 5x + 9$	$+$	

   L'inéquation $2x^2 - 5x + 9 \leq 0$ n'admet aucune solution puisqu'au contraire on a $2x^2 - 5x + 9 > 0$ d'après le tableau de signes auquel cas :
   $$\mathscr{S} = \emptyset$$
   (b) $-x^2 + 10x - 1 > 0$
   Le trinôme $-x^2 + 10x - 1$ admet deux racines qui sont $5 - 4\sqrt{6}$ et $5 + 4\sqrt{6}$; de plus puisque $a = -1$ on obtient :

x	$-\infty$		$5 - 4\sqrt{6}$		$5 + 4\sqrt{6}$		$+\infty$
$-x^2 + 10x - 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation $-x^2 + 10x - 1 > 0$ est l'intervalle :
   $$\mathscr{S} =]5 - 4\sqrt{6}; 5 + 4\sqrt{6}[$$

(c) $7x^2+3x \geq 0$

Le trinôme $7x^2+3x$ admet deux racines qui sont 0 et $-\dfrac{3}{7}$; de plus puisque $a=7$ on obtient :

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{7}$		0		$+\infty$
$7x^2+3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 2. (4 points)

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire S = 10 cm^2 et de périmètre P = 15 cm.

Notons x et y les dimensions du rectangle.

Puisque l'aire vaut 10 on a $xy=10$; de plus puisque le périmètre vaut 15, le demi-périmètre vaut 7,5 ce qui donne $x+y=7{,}5 \Longleftrightarrow y=7{,}5-x$. En utilisant la première équation on obtient :

$$x(7{,}5-x)=10 \Longleftrightarrow 7{,}5x-x^2=10 \Longleftrightarrow -x^2+7{,}5x-10=0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=7{,}5^2-4\times(-1)\times(-10)=56{,}25-40=16{,}25$$

Par conséquent l'équation $-x^2+7{,}5x-10=0$ admet deux solutions disctinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7{,}5-\sqrt{16{,}25}}{-2}=\frac{7{,}5+\sqrt{16{,}25}}{2} \quad \text{ou} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7{,}5-\sqrt{16{,}25}}{2}$$

Lorsque $x=\dfrac{7{,}5+\sqrt{16{,}25}}{2}$ alors $y=7{,}5-x=7{,}5-\dfrac{7{,}5+\sqrt{16{,}25}}{2}=\dfrac{7{,}5-\sqrt{16{,}25}}{2}$

Lorsque $x=\dfrac{7{,}5-\sqrt{16{,}25}}{2}$ alors $y=7{,}5-x=7{,}5-\dfrac{7{,}5-\sqrt{16{,}25}}{2}=\dfrac{7{,}5+\sqrt{16{,}25}}{2}$

Dans les deux cas les dimensions du rectangle sont $\dfrac{7{,}5+\sqrt{16{,}25}}{2}$ et $\dfrac{7{,}5-\sqrt{16{,}25}}{2}$.