

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1.

(10 points)

Bachar Mar-Khalifé¹, jeune star montante du club de basketball du Wall of Garden de Gattaca situé dans la capitale Syldave, a constaté qu'il a une probabilité égale à $\frac{2}{3}$ de réaliser un panier à trois points. Qu'il neige, qu'il vente ou qu'il pleuve, bref quelque soit les conditions cette probabilité est la même. Dans le derby qui oppose les deux clubs de la capitale Bachar Mar-Khalifé sait qu'il va tenter 10 paniers à trois points.

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de paniers à trois points que va marquer Bachar Mar-Khalifé dans ce derby.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X , on précisera ces paramètres.

Ce joueur répète 10 épreuves de Bernoulli de même paramètre $p = \frac{2}{3}$ donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = \frac{2}{3}$ c'est-à-dire :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10; \frac{2}{3}\right)$$

2. Calculer $p(X=0)$ et $p(X=10)$. Interpréter.

Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10; \frac{2}{3}\right)$ on a :

$$P(X=0) = \binom{10}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}$$

puis :

$$P(X=10) = \binom{10}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{2^{10}}{3^{10}}$$

La probabilité que Bachar marque 0 panier est d'exactement $\frac{1}{3^{10}}$ et la probabilité qu'il marque 10 paniers est d'exactement $\frac{2^{10}}{3^{10}}$

3. Calculer la probabilité que Bachar Mar-Khalifé marque au moins 9 paniers à trois points dans ce derby.

On cherche donc :

$$P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{2^{10}}{3^{10}} = \frac{10 \times 2^9 + 2^{10}}{3^{10}}$$

4. Calculer la probabilité que Bachar Mar-Khalifé marque au moins 1 panier à trois points dans ce derby.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{3^{10}}$$

5. Calculer $E(X)$. Interpréter.

Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10; \frac{2}{3}\right)$ on a :

$$E(X) = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

Bachar marquera en moyenne $\frac{20}{3}$ de paniers.

6. Déterminer le nombre n de tentative de paniers à trois points que doit effectuer Bachar Mar-Khalifé pour être sûr à plus de 99% d'en marquer au moins un. Notons $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{2}{3}\right)$, on a alors :

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0) \geq 0,99 \iff P(Z=0) \leq 0,01 \iff \frac{1}{3^n} \leq 0,01 \iff 3^n \geq 100$$

De plus $3^4 = 81$ et $3^5 = 243 > 100$ donc Bachar devra effectuer au moins 5 tentatives pour être sûr à plus de 99% d'en marquer au moins.

1. En 2013 cet artiste libanais vient de sortir un disque s'intitulant Who's Gonna Get The Ball From Behind the Wall of the Garden Today, pour l'anecdote cet album contient 10 titres

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1.

(10 points)

Woodkid², jeune star montante du club de basketball du Golden Age Gattaca situé dans la capitale Syldave, a constaté qu'il a une probabilité égale à $\frac{3}{5}$ de réaliser un panier à trois points. Qu'il neige, qu'il vente ou qu'il pleuve, bref quelque soit les conditions cette probabilité est la même. Dans le derby qui oppose les deux clubs de la capitale Woodkid sait qu'il va tenter 14 paniers à trois points.

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de paniers à trois points que va marquer Woodkid dans ce derby.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X , on précisera ces paramètres.

Ce basketteur répète 14 épreuves de Bernoulli de même paramètre $p = \frac{3}{5}$ donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre $n = 14$ et $p = \frac{3}{5}$ c'est-à-dire :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(14; \frac{3}{5}\right)$$

2. Calculer $p(X = 0)$ et $p(X = 14)$. Interpréter.

Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(14; \frac{3}{5}\right)$ on a :

$$P(X = 0) = \binom{14}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{14} = \frac{2^{14}}{5^{14}}$$

puis :

$$P(X = 14) = \binom{14}{14} \left(\frac{3}{5}\right)^{14} \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{3^{14}}{5^{14}}$$

La probabilité que Bachar marque 0 panier est d'exactement $\frac{2^{14}}{5^{14}}$ et la probabilité qu'il marque 14 paniers est d'exactement $\frac{3^{14}}{5^{14}}$

3. Calculer la probabilité que Woodkid marque au moins 13 paniers à trois points dans ce derby.

On cherche donc :

$$P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) = \binom{14}{13} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{13} \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \frac{3^{14}}{5^{14}} = \frac{14 \times 3^{13} \times 2 + 3^{14}}{5^{14}}$$

4. Calculer la probabilité que Woodkid marque au moins 1 panier à trois points dans ce derby.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{2^{14}}{5^{14}}$$

5. Calculer $E(X)$. Interpréter.

Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(14; \frac{3}{5}\right)$ on a :

$$E(X) = 14 \times \frac{3}{5} = \frac{42}{5}$$

Bachar marquera en moyenne $\frac{42}{5}$ de paniers.

6. Déterminer le nombre n de tentative de paniers à trois points que doit effectuer Woodkid pour être sûr à plus de 99% d'en marquer au moins un.

Notons $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{3}{5}\right)$, on a alors :

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) \geq 0,99 \iff P(Z = 0) \leq 0,01 \iff 0,6^n \leq 0,01$$

De plus $0,6^9 > 0,01$ et $0,6^{10} > 0,01$ donc Bachar devra effectuer au moins 10 tentatives pour être sûr à plus de 99% d'en marquer au moins.

2. En 2013 cet artiste français vient de sortir un disque s'intitulant The Golden Age, pour l'anecdote cet album contient 14 titres.