Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°12 **SUJET A**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1.

On considère la fonctions g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$$

1. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $$g'(x) = 2 \times 3x^2 - 4 \times 2x + 5 = 6x^2 - 8x + 5$$

2. Etudier le signe de $g'(x)$ en fonction des valeurs de x.

   Pour étudier le signe d'un trinôme, il faut connaître ses racines :
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 6 \times 5 = 64 - 180 < 0$.
   Par conséquent $g'(x)$ est du signe de $a = 3$ d'où :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction g.

   Puisque $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'où :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$

Exercice 2.

On considère la fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

1. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, donc pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $$f'(x) = \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 1}{(x^2+1)^2}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente à la représentation graphique de la fonction f au point d'abscisse 0.

   L'équation de la tangente au point d'abscisse $a = 0$ est de la forme :

   $$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(0)x + f(0)$$

   Or, $f'(0) = \dfrac{-0^2 + 2 \times 0 - 1}{(0^2+1)^2} = -1$ et $f(0) = \dfrac{0-1}{0^2+1} = -1$, par conséquent une équation de la tangente à la représentation graphique de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

   $$y = -x - 1$$

3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

   Les éventuels point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses ont une ordonnée nulle et égale à $f(x)$, on résout donc :

   $$f(x) = 0 \iff \frac{x-1}{x^2+1} = 0 \iff x - 1 = 0(x^2+1) \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

   Il existe donc un unique point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, disons A qui a pour coordonnée :

   $$\text{A}(1;0)$$

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnées.

Les éventuels point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnée ont une abscisse nulle et une ordonnée égale à $f(0)$, on calcule donc $f(0)$:

$$f(0) = \frac{0-1}{0^2+1} = -1$$

Il existe donc un unique point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnées, disons B, qui a pour coordonnée :

$$\mathrm{B}(0;-1)$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°12 **SUJET B**

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1.

On considère la fonctions f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

1. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

   f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, donc pour $x \neq -1$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'(x+1) - (x^2+1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente à la représentation graphique de la fonction f au point d'abscisse 0.

   L'équation de la tangente au point d'abscisse $a = 0$ est de la forme :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(0)x + f(0)$$

   Or, $f'(0) = \dfrac{0^2+2\times 0-1}{(0+1)^2} = -1$ et $f(0) = \dfrac{0^2+1}{0+1} = 1$, par conséquent une équation de la tangente à la représentation graphique de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

$$y = -x+1$$

3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

   Les éventuels point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses ont une ordonnée nulle et égale à $f(x)$, on résout donc :

$$f(x) = 0 \iff \frac{x^2+1}{x+1} = 0 \iff x^2+1 = 0(x+1) \iff x^2+1 = 0 \iff x^2 = -1$$

   Un carré étant toujours positif, l'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution et il n'existe pas de point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnées.

   Les éventuels point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnée ont une abscisse nulle et une ordonnée égale à $f(0)$, on calcule donc $f(0)$:

$$f(0) = \frac{0^2+1}{0+1} = 1$$

   Il existe donc un unique point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des ordonnées, disons B, qui a pour coordonnée :

$$\mathrm{B}(0;1)$$

Exercice 2.

On considère la fonctions g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 7$$

1. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Pour tout réel x on a :

$$g'(x) = 3x^2 - 3\times 2x - 6 = 3x^2 - 6x - 6$$

2. Etudier le signe de $g'(x)$ en fonction des valeurs de x.

   Pour étudier le signe d'un trinôme, il faut connaître ses racines :
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times 3\times(-6) = 36 + 72 = 108 > 0$, donc le trinôme g' admet deux racines que voici :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-\sqrt{108}}{6} = \frac{6-6\sqrt{3}}{6} = 1-\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+\sqrt{108}}{6} = \frac{6+6\sqrt{3}}{6} = 1+\sqrt{3}$$

   Par conséquent $g'(x) > 0$ « à l'extérieur des racines » ($a = 3$ étant positif) d'où :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. En déduire le tableau de variation de la fonction g.

La connaissance du tableau de signe de g' donne immédiatement le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	