∾ Correction evoir Surveillé 5 ∾
Vecteurs et dérivation - Partie A

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements. Les exercices 1, 2, 3 et 4 rapportent chacun 5 points.

Exercice 1. Points alignés **(4 points)**

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, on donne les points :

$$A(2,1) \quad , \quad B(x,4) \quad \text{et} \quad C(3,x+2)$$

1. Montrer A, B et C sont alignés si et seulement si $x^2 - x - 5 = 0$

   A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}(x-2;3)$ et $\overrightarrow{AC}(1;x+1)$ sont colinéaires.
   Par conséquent A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$(x-2)(x+1) - 3\times 1 = 0 \iff x^2 + x - 2x - 2 - 3 = 0 \iff x^2 - x - 5 = 0$$

2. En déduire les éventuelles valeurs de x telles que les points A, B et C sont alignés.

   $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times 1\times(-5) = 21$ donc A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$x = \frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

Exercice 2. **(6 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$

1. Montrer que pour $x \neq 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$$

   f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc f' est de la forme $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
   Par conséquent pour $x \neq 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)'x - (x^2+2)x'}{x^2} = \frac{2x\times x - (x^2+2)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$$

2. (a) Expliquer pourquoi étudier le signe de $f'(x)$ revient à étudier le signe de x^2-2.

   Pour $x \neq 0$ on a $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^2-2.

   (b) Déterminer alors le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f.

   On détermine le signe du trinôme x^2-2 ; pour cela commencons par déterminer ses racines :

$$x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

   On en déduit le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{4}{-\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\dfrac{4}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	

3. Ecrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

   Une équation de la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 1 est de la forme :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Or, $f'(1)=\dfrac{1-2}{1}=-1$ et $f(1)=\dfrac{1+1}{1}=2$, d'où :

$$y=-1(x-1)+2=-x+1+2=-x+3$$

4. Existe-t-il des tangentes à la courbes parallèles à la droite d'équation $y=-7x-5$?
Si oui préciser les points de la courbe qui correspondent à ces tangentes.
Il en existe si et seulement si :

$$f'(x)=-7 \iff \frac{x^2-2}{x^2}=-7 \iff x^2-2=-7x^2 \iff 8x^2=2 \iff x^2=\frac{1}{4} \iff x=\pm\frac{1}{2}$$

Il existe deux points A et B en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=-7x-5$.
$f(0,5)=\dfrac{0.25+2}{0.5}=\dfrac{2.25}{0.5}=4,5$ et $f(-0,5)=\dfrac{0,25+2}{-0,5}=-4,5$
$A(0,5;4,5)$ et $B(-0,5;-4,5)$

Exercice 3. Problème **(10 points)**

PARTIE A. **Sans coordonnées**

1. On a $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$
2. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0} &\iff \overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{BG}-3\overrightarrow{CG}\\
&\iff \overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AG}\\
&\iff 6\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\\
&\iff \overrightarrow{AG}=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{AC}\\
&\iff \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

3. Cf figure.
4. On a $6\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BF} \iff \overrightarrow{BF}=-6\overrightarrow{AG}$ Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires de sens contraires.
Le quadrilatère AGBF est donc un trapèze.

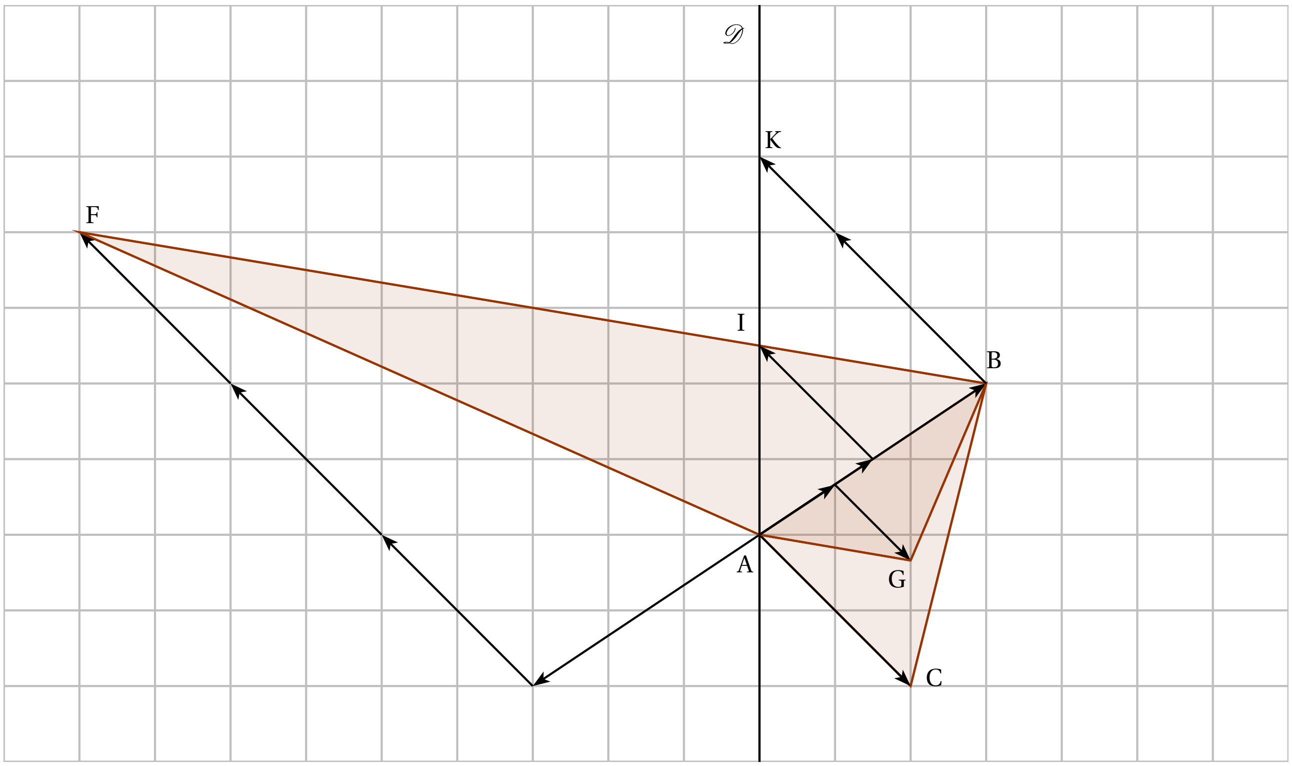
PARTIE B. **Avec coordonnées**

1. Les points A, B et C ne sont pas alignés, donc $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est bien un repère du plan.
2. $A(0;0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ et $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ d'après la question 2 de la partie A.
3. On cherche les coordonnées de $\overrightarrow{AF}$. On a $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\ldots=-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ Donc $F(-1;-3)$.
4. $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ qui est un vecteur directeur de (BF). Donc (BF) a une équation du type $-3x+2y=c$ avec $c\in\mathbb{R}$.
De plus, on sait que $B\in(BF)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (BF) et on a $-3\times1+2\times0=c \iff c=-3$.
Ainsi (BF) : $-3x+2y=-3$.
5. (a) On regarde si les coordonnées de E vérifient l'équation de $\mathscr{D}$: $\frac{3}{2}\times2-\frac{3}{2}=\ldots=\frac{3}{2}\neq0$. Donc $E\notin\mathscr{D}$.
On note $K\left(x;-\frac{3}{2}\right)$. On sait que $K\in\mathscr{D}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{D}$ ie
$\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}=0 \iff x=1$. Donc $K\left(1;-\frac{3}{2}\right)$.
(b) Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$
Or $-1\times-3-\frac{3}{2}\times(-2)=3+3=6\neq0$ donc les droites (BF) et $\mathscr{D}$ sont sécantes. On cherche les coordonnées $(x;y)$ de leur

point d'intersection, qui vérifient le système :

$$\begin{cases} -3x+2y=-3 \\ \dfrac{3}{2}x+y=0 \end{cases} \overset{2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -3x+2y=-3 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \overset{L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -3x+2y=-3 \\ 4y=-3 \end{cases} \Longleftrightarrow \dots \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{4} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{Donc } I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{4}\right)$$

(c) La droite $\mathscr{D}$ passe par les points I et K.



∽ Devoir Surveillé 5 - Partie B ∾
Dérivation

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements. Les exercices 1, 2, 3 et 4 rapportent chacun 5 points.

Exercice 4. **4 points**

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée ci-dessous.

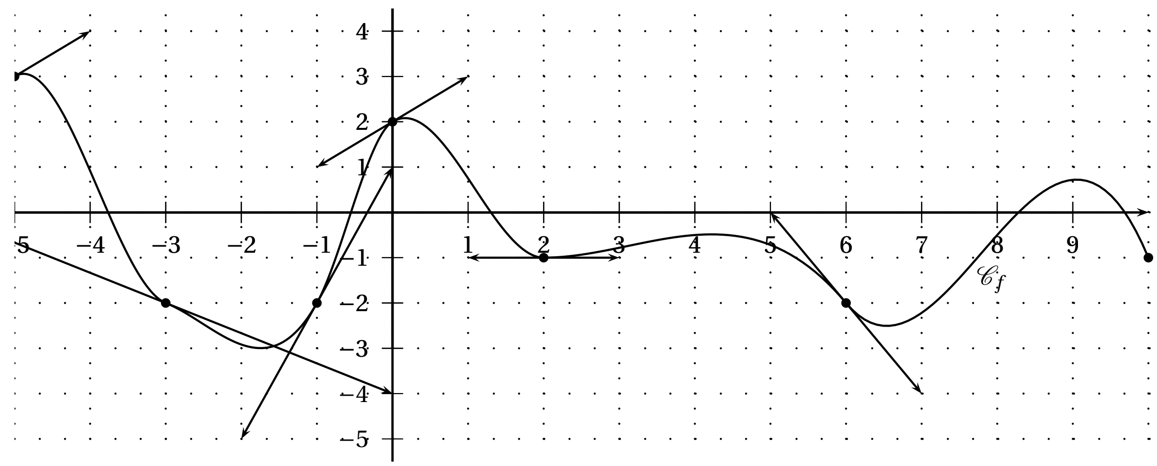
1. Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-5) \quad f'(-3) \quad f'(-1) \quad f'(0) \quad f'(2) \quad f'(6)$$

Le nombre dérivé représente le coefficient directeur de la tangente, par conséquent on lit : $f'(-5)=1$, $f'(-3)=-\frac{2}{3}$, $f'(-1)=3$, $f'(0)=1$, $f'(2)=0$ et $f'(6)=-2$.

2. Le graphique ne permet pas la lecture de $f'(4)$, préciser néanmoins son signe (expliquer)

Autour du point d'abscisse 4 la fonction semble strictement croissante, il en résulte que $f'(4)>0$.



Exercice 5. **7 points**

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - 9x - 12$$

1. Calculer $P'(x)$ pour tout réel x.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$P'(x) = 3x^2 - 9$$

2. Etudier le signe de P' et en déduire le tableau de variation complet de P.

Déterminons les racines du trinôme $3x^2-9$:

$$3x^2 - 9 = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 = 9 \Longleftrightarrow x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

D'où :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3x^2-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		↗	$6\sqrt{3}-12$	↘	$-6\sqrt{3}-12$	↗	

$P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9\sqrt{3} - 12 = -6\sqrt{3} - 12$ et $P(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 + 9\sqrt{3} - 12 = 6\sqrt{3} - 12$

3. Donner le maximum et le minimum de P sur l'intervalle $[-2;2]$.

Sur l'intervalle $[-2;2]$ la dérivée s'annule (en changeant de signe) par deux fois, en $x=\pm\sqrt{3}$ par conséquent P admet un maximum (local) qui est $6\sqrt{3}-12$ et un minimum (local) qui est $-6\sqrt{3}-12$

4. Par lecture du tableau de variation de la fonction P, donner le nombre de solution de l'équation $P(x)=0$.
En donner une valeur approchée à l'aide de votre calculatrice, à 10^{-1} près.

La fonction P admet $6\sqrt{3}-12<0$ pour maximum sur l'intervalle $]-\infty;\sqrt{3}]$, ainsi $P(x)<0$ lorsque $x\leq\sqrt{3}$. Ainsi sur l'intervalle $]-\infty;\sqrt{3}]$ l'équation $P(x)=0$ n'admet aucune solution.
De plus, puisque $P(4)=4^3-9\times4-12=64-36-12=16>0$ et $P(\sqrt{3})<0$ et puisque la fonction P est strictement croissante sur l'intervalle $[\sqrt{3};+\infty[$ l'équation $P(x)=0$ admet une solution unique sur $[\sqrt{3};+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$ qui vérifie (si on note cette solution α) :

$$\sqrt{3}<\alpha<4$$

La calculatrice donne :

$$\alpha\simeq 3,5$$

5. **Application** : Un cube a une arête de x cm. Un parallélépipède rectangle a pour dimensions : 1 cm ; 3 cm et $(3x+4)$ cm. Trouver la valeur de x pour que ces 2 solides aient le même volume.
   Le volume du cube vaut x^3, celui du parallélépipède rectangle $1\times3\times(3x+4)=9x+12$
   Ainsi pour que ces 2 solides aient le même volume il faut et suffit que $x^3=9x+12\iff x^3-9x-12=0\iff P(x)=0$.
   D'après la question précédent $x\simeq3,5$.

Exercice 6. **7 points**

On considère la fonction g par :

$$g(x)=\frac{x^2-3}{2x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
   g est définie si et seulement si $2x-1\neq0\iff x\neq\frac{1}{2}$.
   Par conséquent l'ensemble de définition de g est :
   $$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$$
2. Déterminer la dérivée g' de la fonction g.
   g est de la forme $\frac{u}{v}$, par conséquent sa dérivée g' est de la forme $\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Ainsi pour $x\neq\frac{1}{2}$ on a :
   $$g'(x)=\frac{(x^2-3)'(2x-1)-(x^2-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{2x(2x-1)-2(x^2-3)}{(2x-1)^2=\frac{4x^2-2x-2x^2+6}{(2x-1)^2}}=\frac{2x^2-2x+6}{(2x-1)^2}$$
3. Etudier le signe de g'.
   Pour tout $x\neq\frac{1}{2}$ on a $(2x-1)^2>0$ donc g' a le même signe que $2x^2-2x+6$.
   $\Delta=4-4\times2\times6<0$ d'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2-2x+6$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

4. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   Nous avons profité lors de la question précédente du tableau de signe de g' pour donner le tableau de variation de g.
5. Déterminer les points d'intersection entre les axes du repère et la représentation graphique de la fonction g.
   Avec l'axe des ordonnées :
   $$g(0)=\frac{0^2-3}{2\times0-1}=3$$
   Donc $A(0;3)$ est le point d'intersection entre la représentation graphique de la fonction g et l'axe des ordonnées.
   Avec l'axe des abscisses :

On cherche x tel que :

$$g(x)=0 \Longleftrightarrow \frac{x^2-3}{2x-1}=0 \Longleftrightarrow x^2-3=0 \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

Donc $\mathrm{B}(-\sqrt{3};0)$ et $\mathrm{C}(\sqrt{3};0)$ sont les points d'intersection entre la représentation graphique de la fonction g et l'axe des abscisses.

Exercice 7. **2 points**

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0;2]$ telles que : $f(0)=g(0)$ et $f'\leq g'$ sur I

Démontrer que $f\leq g$ sur I [1]

Etudions la fonction $g-f$ sur I en calculant sa dérivée :

$$(g-f)'=g'-f'$$

Or on sait que, sur I on a $f'\leq g' \Longleftrightarrow 0\leq g'-f'$.
Par conséquent la fonction $g-f$ est croissante sur I.
De plus $(g-f)(0)=g(0)-f(0)=0$ puisque $g(0)=f(0)$. $g-f$ vaut donc 0 en 0 et est croissante sur $\mathrm{I}=[0;2]$, donc sur I on a :

$$g-f\geq 0 \Longleftrightarrow g\geq f$$

1. On pourra étudier les variations de $g-f$