∾ DEVOIR SURVEILLÉ 2 ∾
SUITE

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements.

Exercice 1. (5 points)

Indiquer sans justification la bonne réponse pour chaque question :

1. Si $u_n = n^2 + n - 1$ alors $u_{n+1} =$
   $u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 1 = n^2 + 3n + 1$

2. On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ alors :
   (a) La suite u est croissante et admet pour limite 1 ;
   (b) La suite u est décroissante et admet pour limite 1 ;
   (c) La suite u admet pour limite $+\infty$.

   Plus n devient grand plus $\frac{1}{n+1}$ se rapproche de 0 par conséquent :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$
   et on en déduit :
   $$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$
   La suite u admet pour limite 1.
   De plus
   $$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
   Puisque $n \in \mathbb{N}$ alors $n \geq 0$ et donc $(n+1)(n+2) > 0$ donc $\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ et donc :
   $$u_{n+1} - u_n > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   Par conséquent la suite u est croissante.
   Conclusion : La suite u est croissante et admet pour limite 1.

3. Alice écrit la suite de nombres suivantes :
   $$5 \;;\; 5 \;;\; 6 \;;\; 8 \;;\; 11 \;;\; 15 \;;\; 20 \;;\; 26 \;;\; 33 \;;\; \ldots$$
   Parmi les suites suivantes laquelle **ne permet pas** de retrouver la suite de nombre écrites par Alice :

   (a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$ (b) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_n = u_{n-1} + n - 1 \end{cases}$

   Testons la deuxième formule et calculons u_1, pour cela remplaçons n par 0 :
   $$u_1 = u_0 + 0 + 1 = 5 + 1 = 6$$
   Or, le deuxième nombre d'Alice est 5 ; cette suite ne permet donc pas de retrouver la suite de nombre écrites par Alice.

4. On considère la suite définie pour tout entier naturel n par :
   $$u_n = \sqrt{n} + n$$
   Le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 1000$ est :

   (a) 91 ; (b) 968 ; (c) 969 ; (d) 970.

   $u_{91} = \sqrt{91} + 91 \simeq 100$ donc la réponse (a) est fausse.
   $u_{968} = \sqrt{968} + 968 \simeq 999$ et $u_{969} = 969 * *0.5 + 969 \simeq 1000,12$. On en déduit que le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 1000$ est $n = 969$.

5. On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = u_n - 7 \end{cases}$ alors l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: u est réel, n un entier et $A > 0$
$u := 8$ et $n := 0$
Tant que $(u > -A)$ **Faire**
  $u := u - 7$
  $n := n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

(a) permet d'afficher les termes de la suite u ;
(b) permet d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n \leq -A$;
(c) permet d'afficher le plus grand entier n tel que $u_n > -A$;
(d) ne sert à rien.

La première affirmation est fausse, en aucun cas l'algorithme n'affiche u.
La deuxième affirmation est vraie, effectivement l'algorithme affiche n dès $u_n \leq -A$.
La troisième affirmation est fausse, en effet l'algorithme affiche un entier n tel que $u_n leq - A$, cela ne peut donc pas être le plus grand entier n tel que $u_n > -A$.
La dernière affirmation est complexe et demande de philosopher sur l'utile...

Exercice 2. (4 points)

On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 - 10n + 16$$

Montrer que la suite u est croissante à partir d'un rang que l'on précisera.

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 10(n+1) + 16 - (n^2 - 10n + 16) = n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 + 16 - n^2 + 10n - 16 = 2n - 9$$

Dressons le tableau de signe de $2n - 9$ en fonction de n qui s'annule lorsque $2n - 9 = 0 \iff 2n = 9 \iff n = 4,5$:

n	0		$4,5$		$+\infty$
$2n-9$		$-$	0	$+$	

Ainsi dès lors que $n \geq 5$ (souvenez vous n désigne un nombre entier !) on a

$$2n - 9 > 0 \iff u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$$

On en déduit que la suite u est strictement croissante à partir de $n = 5$

Exercice 3. (8 points)

On trouve dans les écrits anciens, chez Héron d'Alexandrie, un procédé permettant d'extraire la racine carrée d'un nombre :

« Pour extraire la racine carrée de A, choisir une expression arbitraire a ; et prendre la moyenne entre a et $\frac{A}{a}$ et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent »

On considère alors l'algorithme suivant :

Algorithme 2 :

Données: a est un nombre réel et $A > 0$
Entrer A et Entrer a
Pour i allant de 1 à 3 **Faire**
  $a := \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$
  Afficher a
Fin Pour

1. Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre $a = 4$ et $A = 2$?
L'algorithme affiche les trois premiers termes de la suite u définies ci-après, en l'occurrence il affiche approximativement :

$$2,25 \qquad 1.57 \qquad 1.42$$

2. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

(a) Donner u_1 et u_2.

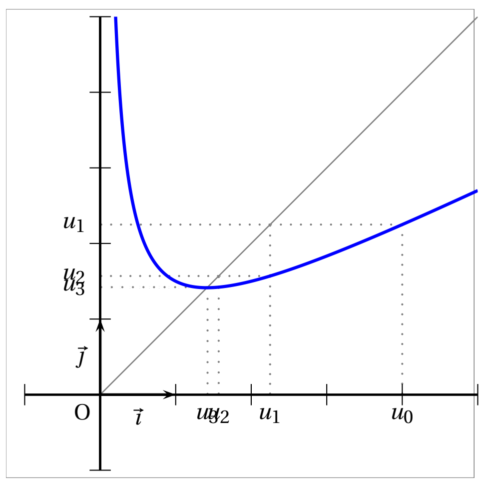
$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{2}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{2}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{2}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{2}{9/4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{2\times 4}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{81}{36} + \frac{32}{36}\right) = \frac{113}{72} \simeq 1.57$$

(b) Donner une fonction f telle que $f(u_n) = u_{n+1}$.
La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ convient.
En effet :

$$f(u_n) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) = u_{n+1}$$

(c) Sur le graphique suivant, nous avons représenté la courbe de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$: Placer sur l'axe des abscisses, **en utilisant $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation** $y = x$, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.



(d) En se servant du graphique précédent, conjecturer le sens de variation de la suite u ainsi que la limite ℓ de la suite u.
Graphiquement on constate que $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$, il semble donc que u soit décroissante.
Les termes de la suite se rapprochent de l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$, on conjecture que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \simeq 1.4$$

3. On souhaite résoudre l'équation (E) : $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x$

(a) Résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$.

$$x^2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad x = -\sqrt{2}$$

Ainsi l'équation $x^2 - 2 = 0$ admet deux solutions :

$$\mathscr{S} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

(b) Montrer que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$. Pour $x \neq 0$ on a la suite d'équivalence suivante :

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x \Longleftrightarrow x + \frac{2}{x} = 2x$$

On multiplie tout par x :

$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow x^2+2=2x^2 \Longleftrightarrow x^2+2-2x^2=0 \Longleftrightarrow -x^2+2=0 \Longleftrightarrow 0=x^2-2$$

(c) Que peut-on penser de la valeur exacte de la limite ℓ de la suite u ?
La limite de la suite u semble être l'abscisse positif du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y=x$, donc semble être la solution (positive) de l'équation $f(x)=x$ qui est $\sqrt{2}$; on peut donc penser que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$

Exercice 4. (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-5x+1$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y=x$.

L'abscisse des points d'intersection de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y=x$ sont les solutions de l'équation :

$$f(x)=x \Longleftrightarrow x^2-5x+1=x \Longleftrightarrow x^2-6x+1=0$$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times1=32>0$ donc l'équation précédente admet deux solutions que voici :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-\sqrt{32}}{2}=3-\sqrt{8} \qquad \text{et} \qquad x_2=3+\sqrt{8}$$

Puisque les points que l'on cherche sont sur la droite d'équation $y=x$ ils ont même abscisse et même ordonnée, par conséquent les deux points d'intersection A et B entre la représentation graphique de f et la droite d'équation $y=x$ ont pour coordonnées :

$$\mathrm{A}\left(3-\sqrt{8};3-\sqrt{8}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}\left(3+\sqrt{8};3+\sqrt{8}\right)$$