∽ CORRECTION DEVOIR MAISON 2 ∾
SUITES ET SECOND DEGRÉ

Vous traiterez au moins l'exercice 1. **A rendre le 08/10/14**

Exercice 1. ★★

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2-u_n} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

pour $n = 0$

$$u_1 = \frac{2 \times u_0}{2-u_0} = \frac{2\times 4}{2-4} = \frac{8}{-2} = -4$$

pour $n = 1$

$$u_2 = \frac{2u_1}{2-u_1} = \frac{2\times(-4)}{2+4} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$

pour $n = 2$

$$u_3 = \frac{2u_2}{2-u_2} = \frac{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)}{2+\frac{4}{3}} = \frac{-8/3}{10/3} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

pour $n = 3$

$$u_4 = \frac{2u_3}{2-u_3} = \frac{2\times\left(\frac{-4}{5}\right)}{2+\frac{4}{5}} = \frac{-8/5}{14/5} = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7}$$

2. **Représentation graphique** :

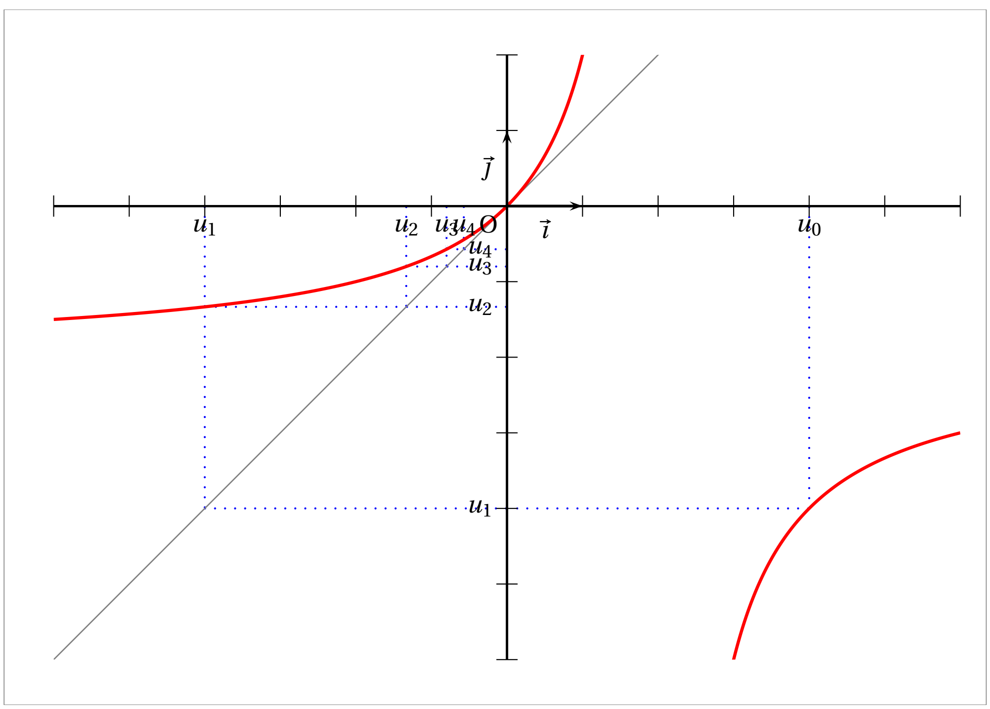
(a) Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit f la fonction définie our $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{2x}{2-x}$. On a alors :

$$f(u_n) = \frac{2u_n}{2-u_n} = u_{n+1}$$

Ainsi la fonction f convient.

(b) On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction de la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2, u_3 et u_4 en laissant apparent les traits de construction.



(c) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la limite de la suite (u_n) ?

Lorsque l'on place u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses ils apparaissent dans l'ordre croissant, on peut **conjecturer** que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

De plus les termes de la suite se rapproche de l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation $y = x$ qui vaut 0, on **conjecture** alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \dfrac{-4}{2n-1}$
   (a) Calculer w_0, w_1, w_2, w_3 et w_4. Que constate-t-on ?

$$w_0 = \frac{-4}{2\times 0-1} = 4 \qquad \text{et} \qquad w_1 = \frac{-4}{2\times 1-1} = \frac{-4}{1} = -4$$

Puis en procédant de même :

$$w_2 = \frac{-4}{2\times 2-1} = \frac{-4}{3} \qquad ; \qquad w_3 = \frac{-4}{2\times 3-1} = \frac{-4}{5} \qquad \text{et} \qquad w_4 = \frac{-4}{2\times 4-1} = \frac{-4}{7}$$

On constate que les suites u et w sont identiques pour n allant de 0 à 4 c'est-à-dire :

$$u_0 = w_0 \quad ; \quad u_1 = w_1 \quad ; \quad u_2 = w_2 \quad ; \quad u_3 = w_3 \quad \text{et} \quad u_4 = w_4$$

On admet que les suites u et w sont identiques.

   (b) Démontrer que :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{8}{(2n+1)(2n-1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Puisque $w_n = \dfrac{-4}{2n-1}$ on a $w_{n+1} = \dfrac{-4}{2(n+1)-1} = \dfrac{-4}{2n+2-1} = \dfrac{-4}{2n+1}$
On en déduit que pour tout entier naturel n on a :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{-4}{2n+1} - \frac{-4}{2n-1} = \frac{-4(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} + \frac{4(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{-4(2n-1)+4(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

c'est-à-dire :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{-8n+4+8n+4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{8}{(2n-1)(2n+1)}$$

   (c) En déduire que w est croissante à partir du rang 1. Etudions le signe de $\dfrac{8}{(2n-1)(2n+1)}$ ce qui revient à étudier le signe de $(2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1$
Or, $\Delta = 0^2 - 4\times 4\times(-1) = 16$ le trinôme $4n^2-1$ admet donc deux racines qui sont :

$$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad n_2 = \frac{-b+\Delta}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

On en déduit alors le signe du trinôme $4n^2-1$:

n	0		0,5		$+\infty$
$4n^2-1$		$-$	0	$+$	

On a donc $4n^2 - 1 > 0$ lorsque $n > 0.5$ c'est-à-dire $w_{n+1} - w_n > 0$ lorsque $n > 0.5$ et donc $w_{n+1} > w_n$. Par conséquent la suite w est croissante à partir de $n = 1$ (soit du rang 1).

4. On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: u est un réel et n un entier.
$n = 1$ et $u := -4$
Tant que $(u < \text{A})$ **Faire**
  $u := \dfrac{2 \times u}{2 - u}$
  $n := n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

(a) Programme cet algorithme (sur algobox ou sur python ou sur votre calculatrice) et précisez ce qu'affiche l'algorithme si $\text{A} = -0.1$ puis si $\text{A} = -0.01$.

L'algorithme sur Python pour $\text{A} = -0.1$:

```
n=1
u=-4
A=-0.1
while u<A:
      u=(2*u)/(2-u)
      n=n+1
print(n)
```

```
21
```

et celui sur algobox pour $\text{A} = -0.01$:

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  u PREND_LA_VALEUR -4
  n PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (u<-0.01) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    u PREND_LA_VALEUR 2*u/(2-u)
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
201
***Algorithme terminé***
```

(b) Que fait cet algorithme ?

Cet algorithme affiche le plus entier naturel n tel que $u_n \geqslant \text{A}$.

Exercice 2. ⋆⋆⋆

1. On pose $a = 0.99999\ldots$ (il y a une infinité de 9 et on le note $a = 0.\underline{9}$).

 (a) Montrer que $10a = 9 + a$

 D'une part $10a = 9,999999\ldots$ et d'autre par $9 + 0,99999999999\cdots = 9,99999\ldots$ c'est-à-dire :

$$10a = 9 + a$$

 (b) En déduire la valeur de a. *Incroyable non ?! Et pourtant vrai, l'infini fait des miracles !*

 Puisque $10a = 9 + a$ on a aussi $9a = 9$ ce qui équivaut à $a = 1$.
 On vient de démontrer que $0,999999999999999\ldots$ est **exactement** égal à 1.

2. On pose $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$ (il y a une infinité de racines imbriquées).

(a) Montrer que $\Phi^2 = 1+\Phi$.

$$\Phi^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}\right)^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} = 1+\Phi$$

(b) En déduire la valeur de Φ. *On appelle Φ le nombre d'or*

On sait que $\Phi^2 = \Phi+1 \iff \Phi^2-\Phi-1=0$.

On trouve $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-1) = 5$ Donc les solutions sont $\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Il est clair que $\Phi > 0$, ainsi $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) Montrer que $\Phi = 1+\frac{1}{\Phi}$.

On sait que $\Phi^2 = \Phi+1 \iff \Phi = 1+\frac{1}{\Phi}$ car $\Phi \neq 0$.

(d) En déduire que $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}} = \dots$

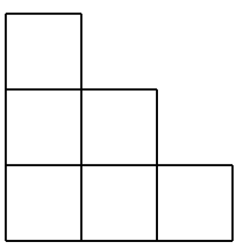
Cette écriture s'appelle le développement en fractions continues de Φ

Puisque $\Phi = 1+\frac{1}{\Phi}$ en remplaçant successivement Φ par cette expression, on peut aussi dire que :

$$\Phi = 1+\frac{1}{\Phi} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}} = \dots$$

Exercice 3. ⋆⋆⋆⋆

On positionne 2016 carrés de chocolat comme sur le dessin ci-dessous



— 1 carré sur la première ligne

— 2 carrés sur la deuxième ligne, etc.

En détaillant le raisonnement, calculer le nombre de carrés de chocolat sur la dernière ligne.

L'algorithme suivant écrit en Python construit la figure :

```
ligne=1

element_par_ligne=1

dernier_nombre=1
L=[]
L.append(1)
print(ligne,L)

while dernier_nombre<100 :
    ligne+=1
    element_par_ligne+=1
    L=[]
    for i in range(element_par_ligne):
        dernier_nombre+=1
        L.append(dernier_nombre)
    print(ligne,L)
```

Python 3.4.0 Shell

File Edit Shell Debug Options Windows Help

```
>>>
1 [1]
2 [2, 3]
3 [4, 5, 6]
4 [7, 8, 9, 10]
5 [11, 12, 13, 14, 15]
6 [16, 17, 18, 19, 20, 21]
7 [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]
8 [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]
9 [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45]
10 [46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55]
11 [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66]
12 [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78]
13 [79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91]
14 [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105]
```

Il suffit de remplacer le 100 par 2016 pour voir s'afficher sur la 63 ème ligne le nombre 2016. Il y a enfin 63 carrés de chocolat sur cette dernière ligne.