Contents

$1^{\text{ÈRE}}S$

Coefficient binomiaux : Pour aller plus loin

D.Zancanaro

---

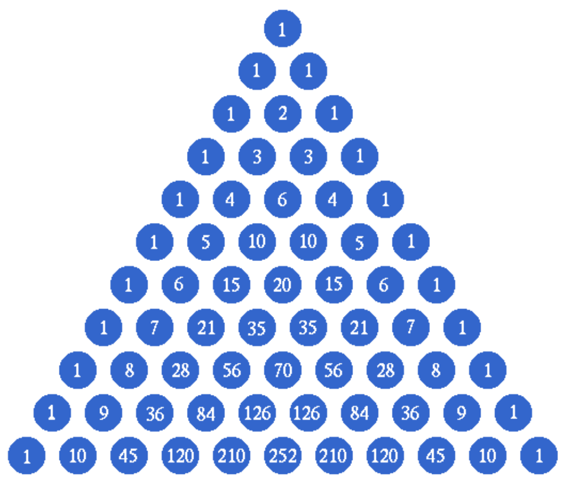
1 Autour de la définition

Definition 1. $\binom{n}{k}$ représente le nombre de chemin avec exactement k succès dans l'arbre modélisant n épreuves de Bernoulli.

On peut aussi voir $\binom{n}{k}$ comme le nombre de mots de n lettres dans lequel figure exactement k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre E.

Propriété 1. *Puisque $\binom{n}{k}$ représente un nombre de chemin alors $\binom{n}{k}$ est toujours un entier positif.*

Exemple. Pour déterminer $\binom{n}{k}$ on utilise le triangle de Pascal :



Par exemple $\binom{5}{2} = 10$, cela signifie qu'il y a 10 mots de 5 lettres qui contiennent deux fois la lettre S et 3 fois la lettre E. Les voici :

SSEEE ; SESEE ; SEESE ; SEEES ; ESSEE ; ESESE ; ESEES ; EESSE ; EESES et EEESS

Il y a donc 10 manières différentes de réussir 2 épreuves de Bernoulli sur un total de 5 symbolisé par les 10 mots précédent.

Le triangle de Pascal est basé sur la relation de récurrence suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

qui par exemple pour $\binom{5}{2}$ donne :

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$$

2 Symétrie des coefficients binomiaux

En observant le triangle de Pascal on a l'impression que chaque ligne est symétrique, en effet on a par exemple :

$$\binom{5}{2} = 10 = \binom{5}{3}$$

ou encore $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$ ou encore $\binom{4}{1} = \binom{4}{3}$.

Nous allons démontré cette propriété :

Propriété 2. *La symétrie des coefficients binomiaux se traduit mathématiquement par l'égalité :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Preuve. Il existe $\binom{n}{k}$ mots de n lettres contenant k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre E.

Si on échange le rôle de S et E il en existe alors tout autant contenant k fois la lettre E et $n-k$ fois la lettre S.

Nous venons de démontrer que :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

□

Exemple. $\binom{5}{2} = 10 = \binom{5}{3}$; les 10 mots de 5 lettres contenant 2 fois la lettre S et 3 fois la lettre E sont

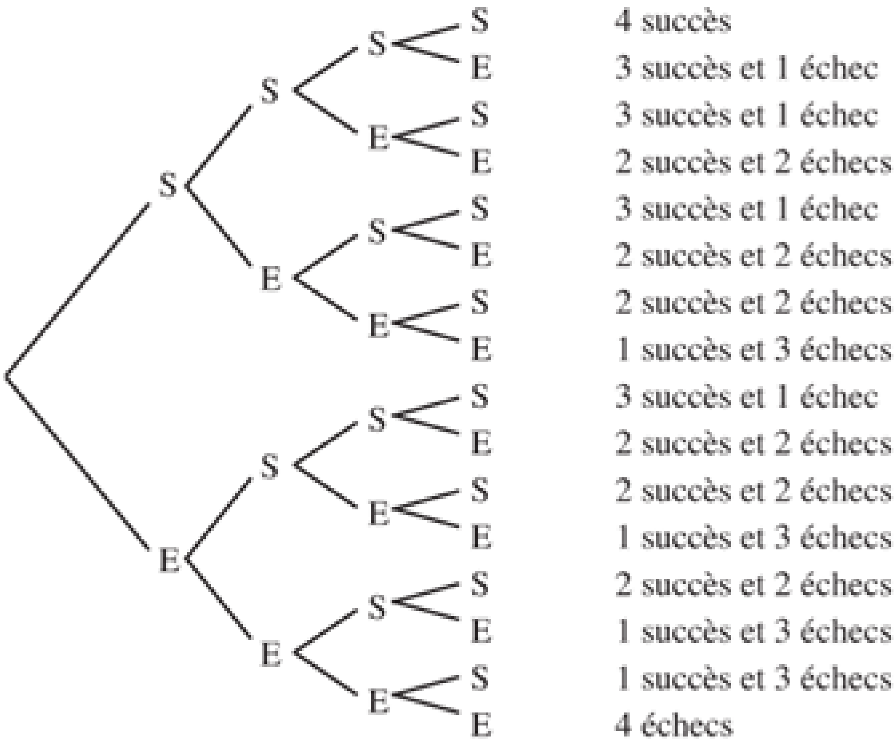
SSEEE ; SESEE ; SEESE ; SEEES ; ESSEE ; ESESE ; ESEES ; EESSE ; EESES et EEESS

et les 10 mots de 5 lettres contenant 2 fois la lettre S et 3 fois la lettre E sont obtenus à partir des précédents en échangeant E et S :

EESSS ; ESESS ; ESSES ; ESSSE ; SEESS ; SESES ; SESSE ; SSEES ; SSESE et SSSEE

3 Somme des coefficients binomiaux

Si on effectue l'arbre modélisant n épreuves de Bernoulli, le voici pour $n = 4$:



On constate qu'au total il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ chemins.
Par conséquent la somme $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$ vaut 16.
On le vérifie à l'aide du triangle de Pascal :

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

Théorème 1. *La somme des coefficients binomiaux de la $n-$ième ligne du triangle de Pascal vaut 2^n c'est-à-dire :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Preuve. l'arbre modélisant n épreuves de Bernoulli contient au total 2^n chemins d'où le résultat. □

Exemple. La somme des coefficients de la troisième ligne du triangle de Pascal vaut :

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

4 Une formule directe (H.P)

Definition 2. la factorielle d'un entier naturel n est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n. Cette opération est noté $n!$

Exemple. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Théorème 2. *On a, lorsque l'entier k vérifie $0 \leq k \leq n$:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

Exemple. $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2! \times 3!} = \dfrac{120}{2 \times 6} = \dfrac{60}{6} = 10$ et on retrouve bien le même résultat que par lecture du triangle de Pascal.

5 Binôme de Newton

On sait que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ mais qu'en est-il de $(a+b)^3$?

$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

On observe que :

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}a^{3-k}b^k$$

Théorème 3. *On a, quelque soit les nombres réels a et b :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Preuve.

$$(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \dots (a+b)$$

Quand on développe l'expression précédente on obtient une somme de monôme de la forme $a^j b^k$ où j et k représentent respectivement le nombre de fois où on a choisit a et b en développant. On a forcément $j + k = n \iff j = n - k$ puisqu'au total il y a n produit.

Enfin comme il y a $\binom{n}{k}$ mots contenant k fois la lettre b et $n-k$ fois la lettre a le monôme $a^{n-k}b^k$ doit apparaître dans le développement avec le coefficient $\binom{n}{k}$. □

Exemple.

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}a^{4-k}b^k = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

On vient de retrouver d'une autre manière que la somme des coefficients binomiaux vaut 2^n.

$$0 = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

Ce qui donne, par exemple pour $n = 3$:

$$0 = 1 - 3 + 3 - 1$$

ou encore pour $n = 4$:

$$0 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1$$

Enfin on a

$$(a-b)^3 = (a + (-b))^3 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(-b)^k = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$