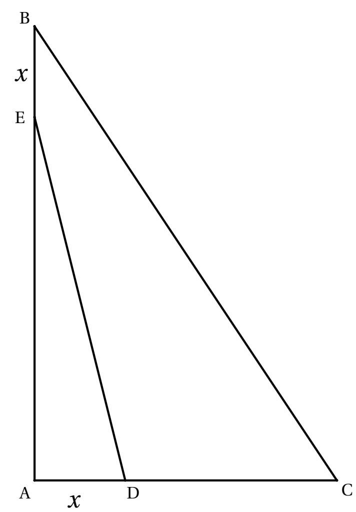
∽ Devoir Surveillé 4 ∾
Trigonométrie ; suite ; fonctions et probabilité

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements. Les exercices 1, 2, 3 et 4 rapportent chacun 5 points.

Exercice 1. **Fonctions**

1. Dans un triangle ABC rectangle en A, on place les points D et E respectivement sur [AC] et [AB] tels que AD = BE = x.
   Voir figure ci-contre
   Données : AB = 18 m et AC = 8 m.



   (a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $-x^2+18x-72=0$.

   (b) Déterminer l'aire du triangle ABC.

   (c) Exprimer l'aire du triangle ADE en fonction de x.

   (d) Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.

2. Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des **entiers consécutifs** et dont la somme des aires est 15125 ? Si oui, préciser quelles sont les valeur que doivent avoir les côtés.
   Indication : On pourra démontrer que si x est la longueur du plus petit des trois carrés alors $3x^2+6x-15120=0$

Exercice 2. **Probabilité**

Igor, un champion de roller sous marin, s'inscrit au championnat du monde de la discipline. Il doit effectuer deux figures pour lesquelles il est particulièrement entrainé. Par expérience il sait qu'il a 70% de chance de réussir sa première figure, par contre il n'a que 40% de chance de réussir sa deuxième figure. Le gouvernement Syldave a décidé de récompenser son champion de la manière suivante :

— S'il réussit les deux figures, Igor reçoit la somme de 1000 € Syldave.

— S'il ne réussit qu'une figure, le gouvernement syldave récompense Igor d'un euro syldave.

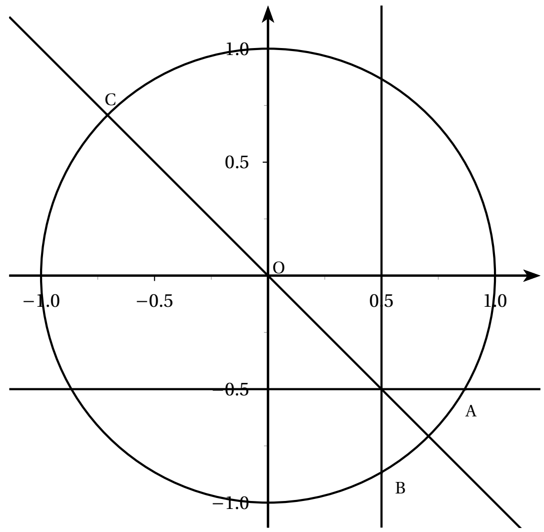
— Sinon Igor doit au gouvernement syldave la somme de 2000 € Syldave.

On note R_1 l'événement :« Igor réussit sa première figure » et R_2 l'événement :« Igor réussit sa deuxième figure »

1. Décrire par un arbre pondéré cette expérience aléatoire.
2. Calculer $P(\overline{R_1}\cap\overline{R_2})$.
3. Calculer la probabilité qu'Igor réussisse les deux figures.
4. Calculer la probabilité qu'Igor réussisse exactement une figure.
5. On note G la variable aléatoire donnant les gains d'Igor.
   (a) Donner les valeurs que peut prendre la variable aléatoire G puis déterminer la loi de probabilité de G.
   (b) Déterminer l'espérance de G. Igor a-t-il raison de s'inscrire au championnat du monde ?
   (c) Déterminer l'écart-type $\sigma(G)$.
6. Si Igor était Grolandais alors $Y=40G-100$ est la variable aléatoire qui donne les gains qu'Igor obtiendrait du gouvernement Grolandais. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter.

Exercice 3. **Trigonométrie**

Trois points A, B et C sont placés sur le cercle trigonométrique ci-dessous :



1. Donner la mesure principale associé aux points A, B et C.
2. Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les points :

$$E\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \quad ; \quad F\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad G\left(\frac{15\pi}{2}\right)$$

3. Compléter le tableau suivant :

x	$-\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{2\pi}{3}$
$\cos x$			
$\sin x$			

4. Déterminer la mesure principale de $\dfrac{2014\pi}{3}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. On sait que x est un réel de l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et que $\cos x = \dfrac{5}{6}$. Déterminer $\sin x$.

Exercice 4. **Suites**

Les parties A et B sont indépendantes et peuvent donc se traiter séparément.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sqrt{4n+5}$$

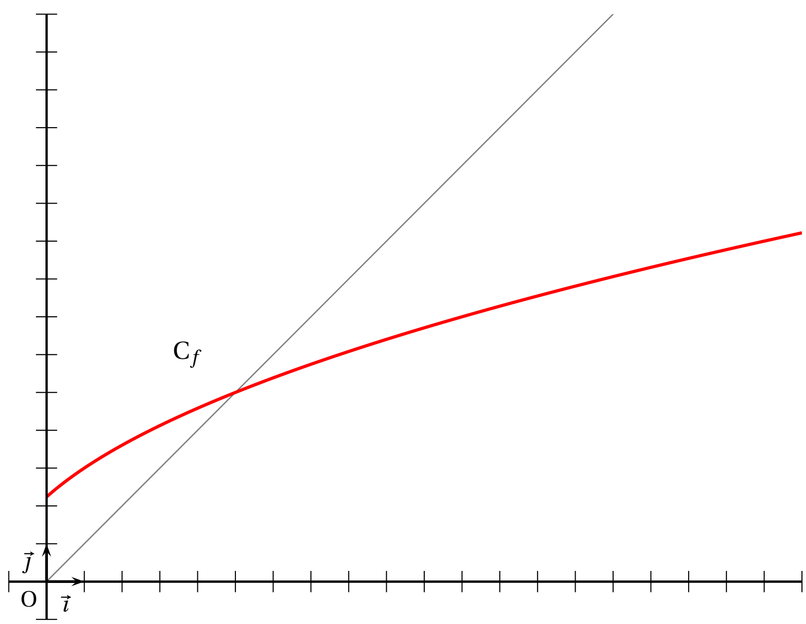
1. Calculer u_0 ; u_1 et u_{100}.
2. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \sqrt{4x+5}$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   (b) Déterminer le sens de variation de la fonction f.
   (c) Déduire de la question précédente que pour tout entier naturel n on a :
$$f(n+1) > f(n)$$
   (d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par :

$$\begin{cases} v_0 = 19 \\ v_{n+1} = \sqrt{4v_n+5} \end{cases}$$

1. Calculer v_1 ; v_2 et v_3. Donner si besoin une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Soit $f(x) = \sqrt{4x+5}$. Sur le graphique suivant, nous avons représenté la courbe de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$:



Placer sur l'axe des abscisses, **en utilisant $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation** $y = x$, les termes v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4. On laissera apparent les traits de construction.

3. Conjecture, à l'aide de la question précédente, le sens de variation de la suite (v_n) et la limite ℓ de la suite (v_n).
4. Retrouver par le calcul la valeur de la limite ℓ que vous avez conjecturé à la question précédente.
5. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: v est réel, n un entier et $A > 0$
$v := 19$ et $n := 0$
Choisir une valeur positive pour A
Tant que ($|v - 5| > A$) **Faire**
 $v := \sqrt{4 \times v + 5}$
 $n := n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

(a) Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur choisit $A = 1$. **On ne demande aucune justification.**

(b) Que fait cet algorithme ? **On ne demande aucune justification.**

Exercice 5. **Question Cactus**

Deux prisonniers (complices d'un crime) sont retenus dans des cellules séparées et qui ne peuvent communiquer ; l'autorité pénitentiaire offre à chacun des prisonniers les choix suivants :

— si un des deux prisonniers dénonce l'autre, il est remis en liberté alors que le second obtient la peine maximale (20 ans) ;

— si les deux se dénoncent entre eux, ils seront condamnés à une peine plus légère (10 ans) ;

— si les deux refusent de dénoncer, la peine sera minimale (1 ans), faute d'éléments au dossier.

En se plaçant du point de vue d'un des deux prisonniers, que faire ? Expliquez votre réponse.