∽ COURS ∽
PROBABILITÉS 2

I) Loi Exponentielle

Travail de l'élève 1 : Un atome radioactif est un atome qui, au bout d'un certain temps, se désintègre, c'est-à-dire qu'il se transforme en un atome d'un autre type.
On considère un atome radioactif dont la probabilité de se désintégrer dans une unité de temps est p et on se demande quel temps on doit attendre pour qu'il se désintègre.

PARTIE A : **Etude d'une simulation**

On a simulé sur Géogébra le temps de désintégration de $n = 10\,000$ atomes radioactifs identiques.

Mettre l'histogramme du Delagrave p 214

Le diagramme précédent donne l'histogramme des fréquences de désintégration par tranche d'une unité de temps.

On choisit au hasard un atome de l'échantillon et on appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le temps de désintégration de l'atome.
Estimer graphiquement et interpréter en français :

1. $P(X \leq 2)$, $P(X \leq 5)$ et $P(3 \leq X \leq 5)$.
2. La valeur t_0 telle que $P(X \leq t_0) = 0.5$ *t_0 s'appelle le temps de demi-vie de ce type d'atomes*

PARTIE B : **Etude avec une courbe de densité**

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 0.2e^{-0.2x}$.

1. Que constatez-vous graphiquement ?
2. Proposer alors une autre méthode pour estimer $P(X \leq 2)$.

A partir de la, on vérifie avec les élèves que f est bien une fonction densité sur $[0; +\infty[$.
Puis on retrouve tous les résultats de la partie A.

Conclusion : Dans ce cas, on dit que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.2$.
Où lit-on λ sur la courbe représentative de f ?

Définition 1.

Une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. On note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire ou sans vieillissement, ou encore non sujet à l'usure du temps.

Par exemple : la durée de vie d'un atome radioactif, la durée de bon fonctionnement d'un appareil électronique, le temps d'attente entre deux coups de téléphone, le temps écoulé entre deux événements accidentels ...

Propriété 1.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors :

- pour tous réels a et b tels que $0 \leq a \leq b$ on a

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = \ldots = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

- pour tous réels t et h positifs, on a

$$P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h) = 1 - P(X < h) = 1 - \int_0^h \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = \ldots = e^{-\lambda h}$$

  d'où le fait que l'on parle de durée de vie sans vieillissement.

- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Exercice(s) du livre : Delagrave : A corrigé p 218 + exos p 221

II) Loi de Poisson

Travail de l'élève 2 : Le nombre moyen de clients qui se présentent à la caisse d'un kiosque de centre-ville sur un intervalle de 10 min est de 15.

1. On considère la variable aléatoire X correspondant au temps en minutes entre deux clients.
   La variable Y suit une loi exponentielle de paramètre λ, égal au nombre moyen de clients par minute.
   a. Déterminer λ.
   b. On s'intéresse à la probabilité qu'aucun client ne se présente à la caisse dans un intervalle de 3 min.
2. On considère désormais la variable aléatoire Y correspondant au nombre de clients se présentant à la caisse dans un intervalle de 3 min.
   a. Déterminer le nombre moyen α de clients se présentant à la caisse dans un intervalle de 3 min.
   b. A l'aide de la calculatrice et en suivant la même démarche que pour la loi binomiale, déterminer $P(Y=0)$ si Y suit une loi de Poisson de paramètre α
   c. Que constatez-vous ?

Conclusion : La loi de Poisson de paramètre α sert à modéliser le comportement du nombre d'événements se produisant dans un laps de temps donné, à une fréquence moyenne α, indépendante du temps écoulé depuis l'événement précédent (autrement si le temps d'attente entre les événements suit une loi exponentielle)

Définition 2.

Une variable aléatoire discrète X suit une loi de Poisson de paramètre α ($\alpha > 0$) si pour tout entier naturel k, sa loi de probabilité est donnée par

$$P(X=k) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}$$

La loi est notée $\mathscr{P}(\alpha)$

Une loi de Poisson modélise des phénomènes raes, qui se produisent de manière indépendante et aléatoire.

Par exemple : le nombre de pièces défectueuses dans une production en série, le nombre d'appels téléphoniques dans un intervalle de temps donné, le nombre d'accidents sur une autoroute dans un intervalle donné ...

Propriété 2.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha)$ alors :

- On utilisera la calculatrice pour calculer $P(X=k)$ et $P(X \leq k)$.
- $E(X) = \alpha$ et $\sigma(X) = \sqrt{\alpha}$

Exercice(s) du livre : Delagrave : TP1 p 220 + exos p 221

Remarque : On admet que si n est suffisamment grand ($n \geq 30$) , p voisin de 0 ($p \leq 0.1$) et np pas trop grand ($np \leq 10$) alors on peut approcher les probabilités associées à la loi binomiale de paramètres n et p par celles obtenues avec la loi de Poisson de paramètre $\alpha = np$

Exercice(s) du livre : Delagrave : exos p 222 Chercher des exos plus complets type BTS

III) Chaîne de Markov