COURS
EQUATION DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Il reste à trouver des exos sur :

- Faire une fiche sur Xcas (interprétations) et géogébra (représentations d'une famille de solution)
- Présentation de la méthode d'Euler
- résistance des matériaux et sur circuit électronique (ordre 2)

I) Introduction

Définition 1.

Une **équation différentielle** (ED) est une équation où l'inconnue est une fonction (et non un nombre).
Résoudre une équation différentielle signifie donc déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.
On appelle ces fonctions les solutions de l'ED.

Exemples :
Il existe une grande variété d'équations différentielles. On se limitera dans ce cours aux exemples basiques, tels que :

- $3f'(x)+5f(x)=18$ notée généralement $3f'+5f=18$ pour alléger les notations, ou encore $3y'+5y=18$
- $5y'-2y=\sin(t)$
- $3f''+5f'-4f=18$
- $-y''+16y'+y=0$

Plus généralement, on étudiera

- les ED linéaires du **premier ordre** du type

$$ay'+by=c(t)$$

  où a et b sont des constantes réelles ($a\neq 0$) et c une fonction continue à valeurs réelles. *On dit que ces équations différentielles sont du **premier ordre**, car la fonction cherchée intervient par sa dérivée première.*

- les ED linéaires du **second ordre** du type

$$ay''+by'+cy=d(t)$$

  où a, b et c sont des constantes réelles ($a\neq 0$) et c une fonction continue à valeurs réelles. *On dit que ces équations différentielles sont du **second ordre**, car la fonction cherchée intervient par sa dérivée première et sa dérivée seconde.*

Exemples :

Préciser les valeurs de a, b et $c(x)$ dans les équations suivantes :

- $3y' + 5y = 18$
- $5y' - 2y = 3x$
- $y' - 3y - \sin(x) = 0$
- $y'(t) - y(t) + 1 = \ln(t) + x^2$

II) ED linéaire du premier ordre

II.1. Exemples

Travail de l'élève 1 : *Menée ensemble à l'oral*

Considérons l'ED

$$3y' + 5y = 18 \quad \text{(E)}$$

1. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{18}{5}$ est une solution particulière de cette ED.
   Est-ce la seule ?
2. Soit f une autre solution de l'ED (E) et g la fonction définie par $g = f - h$.
   Que vaut $3g' + 5g$?
   Déterminer alors une ED appelée (E_0) vérifiée par g.
   *On appelle cette équation l'**équation homogène associée à** (E).*
   Elle nous est utile car les ED considérées ici sont toutes linéaires, donc on retrouve à chaque fois le même raisonnement sur g
3. Vérifier que les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ke^{-\frac{5}{3}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont solutions de (E_0)
   On admet grâce à nos connaissances sur les fonctions usuelles que ce sont les seules.
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Travail de l'élève 2 : Considérons l'ED

$$y' + 2y = -5e^{-2x} \quad \text{(E)}$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

1. **Solution générale de l'équation homogène associée** (E_0)
   a. Déterminer l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E)
   b. Vérifier que les fonctions g de la forme $g(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}$, où $k \in \mathbb{R}$ sont solutions de (E_0).
   On admet grâce à nos connaissances sur les fonctions usuelles que ce sont les seules.
2. **Recherche d'une solution particulière de** (E)
   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\alpha x e^{-2x}$ où α est une constante.
   Déterminer α pour que la fonction h soit une solution de (E).
3. **Solution générale de** (E)
   En reprenant le raisonnement de l'activité précédente, déterminer les solutions f de l'ED (E).
4. **Conditions initiales**
   Déterminer la solution f de l'ED (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$

II.2. Méthode de résolution

Elle se déroule en quatre étapes.

Recherche de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0)

Définition 2.

Soit (E) l'ED
$$ay' + by = c(x) \qquad \forall x \in I$$
On appelle équation homogène associée à (E) l'équation (E_0) :
$$ay' + by = 0 \qquad \forall x \in I$$

La solution générale de l'équation homogène (E_0) est alors constituée des fonctions g de la forme
$$g(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}$$
où k est une constante.

Recherche d'une solution particulière de l'équation (E)

Pour vous, trois cas se présentent :

- Il y a une solution constante évidente .
- L'énoncé donne une fonction h et il suffit de vérifier qu'elle est bien solution de (E)
- L'énoncé donne seulement la forme d'une fonction h et il faut déterminer des coefficients pour que h soit solution de l'équation (E).

Résolution de (E)

On applique le théorème suivant :

Théorème 1.

La solution générale d'une ED linéaire (E) est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée à (E) et d'une solution particulière de (E).

Ainsi ici, la solution générale de (E)) est donc constituée des fonctions f de la forme :
$$f(x) = ke^{-\frac{b}{a}x} + h(x)$$

Conditions initiales

Parmi les fonctions f solutions de (E), l'énoncé peut demander de déterminer la fonction f qui vérifie une condition initiale du genre $f(\alpha) = \beta$.
Il s'agit alors de déterminer la constante k telle que cette condition soit vérifiée.

II.3. Exercices

II.3.a. Applications bêtes et méchantes

Exercice 1 : Résoudre les ED suivantes :

⇝ $2y' + 3y = 0$ ⇝ $4y' + 5y = 0$ ⇝ $2y' - 3y = 0$

Exercice 2 : Pour chacune des ED suivantes, vérifier que la fonction h est une solution de l'équation proposée, puis résoudre l'ED :

⇝ $y' + 2y = 6$; $h(x) = 3$ ⇝ $y' - y = x$; $h(x) = -x - 1$ ⇝ $2y' + y = e^x$; $h(x) = \frac{1}{3}e^x$

Exercice 3 : On considère l'ED $y' + 3y = 5$

1. Déterminer le réel a pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = a$ soit une solution de l'ED
2. Résoudre l'ED.

Exercice 4 : Pour chacune des ED suivantes, déterminer la fonction f solution vérifiant la condition initiale donnée :

⇝ $y' - 2y = 0$; $f(0) = 2$ ⇝ $y' + y = 0$; $f(-1) = 3$ ⇝ $y' + 2y = 0$; $f(0) = 2$

Exercice 5 : On considère l'ED (E) : $y' + 3y = 3$

1. Déterminer le réel a pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = a$ soit une solution particulière de l'ED (E)
2. Déterminer la solution générale g sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée à (E)
3. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = -1$

Exercice 6 : On considère l'ED (E) : $5y' - y = x$

1. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x - 5$ est une solution particulière de (E)
2. Déterminer la solution générale g sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée à (E)
3. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$

Exercice 7 : On considère l'ED (E) : $y' - 2y = -4t$

1. Déterminer une solution particulière h de (E) de la forme $h(t) = \alpha t + \beta$, où α et β sont des constantes réelles à déterminer.
2. Déterminer la solution générale g de l'équation homogène associée à (E).
3. En déduire la solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = 3$

Exercice 8 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'ED (E) : $2y' - y = -t^2 + 5t$

1. Déterminer une solution particulière h de (E) de la forme $h(t) = \mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t + \mathrm{C}$, où A, B et C sont trois réels à déterminer
2. Déterminer la solution générale g de l'équation homogène associée à (E).
3. En déduire la solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f(-1) = 5$

Exercice 9 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'ED (E) : $y' + y = 2\cos(x)$

1. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \big(\cos(x) + \sin(x)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer la solution générale g de l'équation homogène associée à (E).
3. En déduire la solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Exercice 10 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'ED (E) : $y' - y = \sin(x)$

1. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}\big(\cos(x) + \sin(x)\big)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer la solution générale g de l'équation homogène associée à (E).
3. En déduire la solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

II.3.b. Type CCF

Exercice 11 : On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - y = \mathrm{e}^x - 2x$$

où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) : \quad y' - y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x + 2x + 2.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.

Exercice 12 : On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - 3y = -\mathrm{e}^{3x}$$

où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) : \quad y' - 3y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x\mathrm{e}^{3x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 13 : Pour tester la résistance à la chaleur d'une plaque d'isolation phonique, on porte en laboratoire sa température à 100° C et on étudie l'évolution de sa température en fonction du temps t en minutes. Soit $\theta(t)$ la température en degrés Celsius de la plaque à l'instant t exprimé en minutes.
La température ambiante du laboratoire est de 19°C et après 6 minutes, la température est redescendue à 82°C. En exploitant ces données, on peut affirmer que la fonction θ est solution de l'équation différentielle :

$$y'(t) + 0.042y(t) = 0.798 \qquad (\mathrm{E})$$

où y est la fonction inconnue, de variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$

PARTIE A : **Première partie**

1. Résoudre sur l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation homogène associée à (E)
2. Trouver une solution particulière de (E) constante du type $h(t) = a$ où a est un nombre réel à déterminer.
3. En déduire toutes les solutions de (E)
4. D'après l'énoncé, donner $\theta(0)$ puis déterminer la solution θ de l'équation (E) vérifiant cette condition initiale.

PARTIE B : **Deuxième partie**

1. On admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$\theta(t) = 81e{-}0.042t + 19$$

   a. Tracer à l'écran de votre calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction θ pour $0 \leq t \leq 150$
   b. Calculer la température de la plaque après 35 minutes.
      Retrouver graphiquement ce résultat à l'aide de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue sur la calculatrice.
   c. Calculer la fonction dérivée θ'
      En déduire le sens de variation de θ sur $[0; +\infty[$
   d. Calculer le temps à partir duquel la température de la plaque est inférieure à 30°C .
      Retrouver graphiquement ce résultat à l'aide de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue sur la calculatrice.
   e. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$ et interpréter ce résultat.

Travail de l'élève 3 : **Méthode d'Euler**

Très peu d'équations différentielles sont résolubles par calculs.
Cependant, lorsque l'on est sûr qu'il existe une solution unique à une ED satisfaisant des conditions initiales, on peut utiliser la méthode d'Euler pour en déterminer une valeurs approchées. Cette méthode repose sur l'approximation d'une fonction par ses tangentes successives. Je m'explique sur un exemple.

Considérons le système différentielle $\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Pour diverses raisons, j'affirme à Leonhard que cette ED admet une unique solution, que j'appelle f. Donc

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f' + 2xf = 0 \iff \boxed{f' = -2xf} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f(0) = 1}$$

Leonhard ne sait pas résoudre cette ED, mais il est curieux et se demande à quoi peut bien ressembler sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1. *Tous ensembles, avec image Géogébra vidéo-projetée*

   a. Leonhard sait déjà que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $\boxed{\text{A}(\dots,\dots)}$

   Afficher A *dans Géogébra*

   b. Il a ensuite l'idée ingénieuse de se dire qu'aux environs du point A, la courbe est proche de sa tangente en ce point. Il cherche donc à déterminer son équation.
   Leonhard se rappelle l'équation de la tangente à une courbe au point d'abscisse a, bien connue de tous :

   $$\boxed{\text{T}_a\ :\ \dots\dots\ =\ \dots\dots\dots}$$

   c. Ainsi au point A, la tangente à la courbe a pour équation :

   $$\text{T}_{\dots}\ :\ \dots\dots\ =\ \dots\dots\dots$$

   d. Leonhard utilise alors l'ED donnée pour trouver une expression plus explicite.
   Il sait que $f(0)\ =\ \dots$ Et que $f'(0)\ =\ -2\ \times\ \dots\dots\ \times\ \dots\dots\ =\ \dots\dots$
   Il en déduit donc plus précisément l'équation de la tangente considérée :

   $$\text{T}_{\dots}\ :\ \dots\dots\ =\ \dots\dots\dots$$

   Afficher cette tangente sur $[0, 1]$ *dans Géogébra*

   e. Puisque la courbe $\mathscr{C}_f$ est proche de cette tangente aux environs de A, Leonhard se dit que l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$ est presque celle de cette tangente sur l'intervalle $[0, 1]$, donc que

   $$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \simeq \dots$$

   Il en déduit que $f(1) \simeq \dots$ et donc que la courbe passe presque par le point B$(1, \dots)$

   Afficher B *dans Géogébra*

   f. Leonhard recommence alors le processus précédent au point d'abscisse 1.
   Il sait que

   $$\text{T}_1\ :\ \dots\dots\ =\ \dots\dots\dots$$

   Or il a établit que $f(1)\ \simeq\ \dots$ Et donc $f'(1)\ =\ -2\ \times\ \dots\dots\ \times\ \dots\dots\ \simeq\ \dots\dots$
   Il en déduit alors plus précisément l'équation de la tangente considérée :

   $$\text{T}_{\dots}\ :\ \dots\dots\ =\ \dots\dots\dots$$

Afficher cette tangente sur $[1,2]$ *dans Géogébra*

2. *A vous de jouer !*

a. Leonhard pourrait continuer ce processus, mais il pense qu'il n'a pas été assez précis.
Il reprend donc la méthode précédente, mais décide de ne tracer la première tangente que sur $[0,0.5]$.
Placer le point A **dans le repère donné et tracer** T_0 **sur** $[0,0.5]$

b. Leonhard recommence alors sa démarche précédente. Il se dit que l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$ est presque celle de cette tangente sur l'intervalle $[0,0.5]$, donc que

$$\forall x \in [0,0.5] \quad f(x) \simeq \ldots$$

Il en déduit que $f(0.5) \simeq \ldots$ et donc que la courbe passe presque par le point $\mathrm{C}(0.5,\ldots)$
Placer C

c. Leonhard sait donc que

$$T_{0.5} \ : \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots\ldots$$

Or il a établit que $f(0.5) \ \simeq \ \ldots$ Et donc $f'(0.5) \ = \ -2 \ \times \ \ldots.. \ \times \ \ldots.. \ \simeq \ \ldots..$
Il en déduit

$$T_{\ldots} \ : \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots\ldots$$

Tracer la tangente considérée sur $[0.5,1]$**.**

d. Leonhard obtient donc

$$\forall x \in [0.5,1] \quad f(x) \simeq \ldots$$

STOP PROF

e. Puis Leonhard recommence la démarche précédente sur $[1,1.5]$.

$$T_1 \ : \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots\ldots$$

Or $f(1) \ \simeq \ \ldots$ Et $f'(1) \ = \ -2 \ \times \ \ldots.. \ \times \ \ldots.. \ \simeq \ \ldots..$
Ainsi

$$T_{\ldots} \ : \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots\ldots$$

Tracer la tangente considérée sur $[1,1.5]$**.**
Et donc

$$\forall x \in [0.5,1] \quad f(x) \simeq \ldots$$

STOP PROF

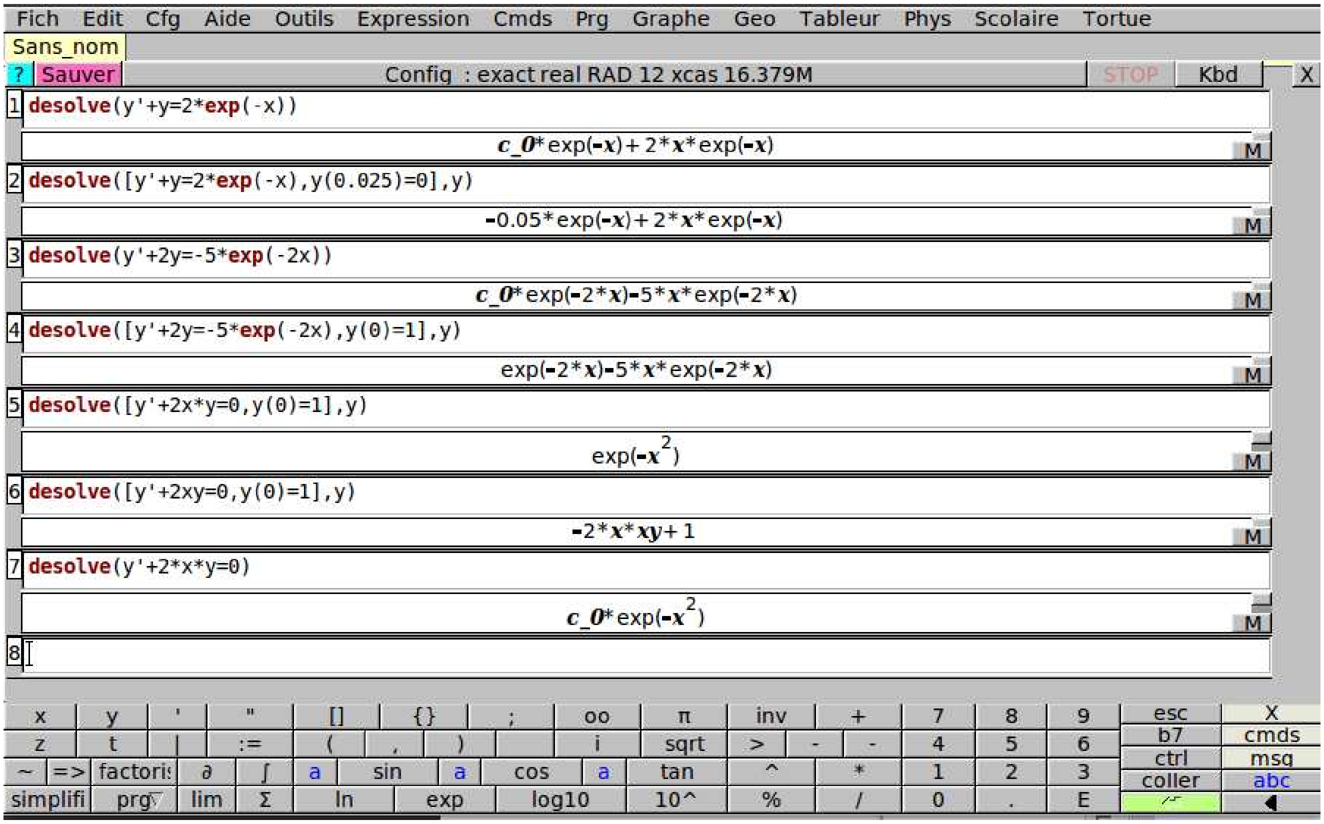
f. Réitérer cette démarche sur $[1.5,2]$

STOP PROF

Afficher ensuite dans Géogébra la solution avec un pas de 0.5*, puis de* 0.25*, puis la vraie solution et enfin avec un pas de* 0.125*, tout en commentant.*
Il existe une autre superbe illustration ici : yallouz.arie.free.fr/terminale_cours/euler/euler.php

III) Avec un logiciel

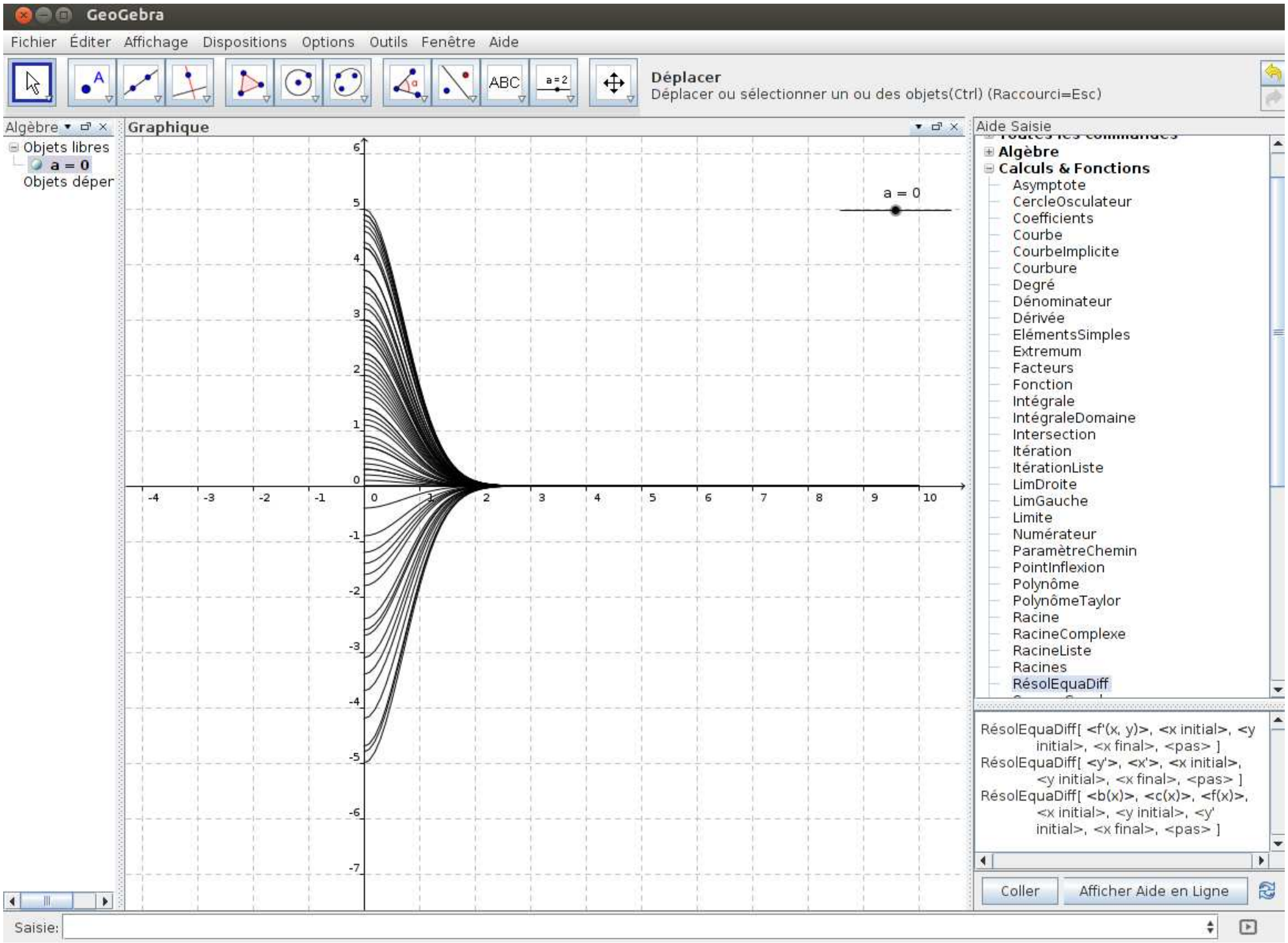
III.1. Sous Xcas



- La première ligne résout l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2e^{-x}$
  Les solutions de cette ED sont les fonctions du type $f(x) = c_0e^{-x} + 2xe^{-x}$
  On reconnait facilement une solution particulière de (E) à savoir $h(x) = 2xe^{-x}$
  Ainsi que la solution générale de l'équation homogène (E_0 : $y' + y = 0$ associée à (E), à savoir $g(x) = c_0e^{-x}$
- La deuxième ligne résout encore (E) mais avec la condition initiale $y(0,025) = 0$.
  Elle trouve donc $f(x) = -0,05e^{-x} + 2xe^{-x}$. On reconnaît facilement $c_0 = -0,05$.
  Remarquez que cette fois, le logiciel a besoin que l'on délimite le système entre crochets et que l'on précise l'inconnue ensuite.
  Si vous l'oubliez, le logiciel ne trouve aucune solution.
- La troisième ligne résout l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = -5e^{-2x}$
- La quatrième ligne résout encore (E) mais avec la condition initiale $y(0) = 1$.
- La cinquième ligne résout le système $\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
- Dans la sixième ligne, le logiciel ne résout pas le même système. L'absence du signe × entre le x et le y lui fait considérer xy comme un seul nom de variable.
- La dernière ligne résout l'ED $y' + 2xy = 0$. Une solution particulière est donc $h(x) = 0$.

III.2. Avec Géogébra

Voici la représentation graphique de plusieurs solutions à l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$.



Créer un curseur a.
Dans l'aide Saisie à droite, on va dans « Calculs & Fonctions » et on choisit « RésolEquaDiff »

Dans la ligne de Saisie écrire alors **RésolEquaDiff[-2x*y,0,a,10,0.1]**

Cliquer droit sur la courbe qui s'affiche et activer la trace.
Bouger le curseur.

Les solutions des systèmes $\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = a \end{cases}$ s'affichent sur $[0;10]$ avec une précision de calculs à 0.1.

IV) ED linéaire du second ordre

IV.1. Exemples

Travail de l'élève 4 : *Menée ensemble à l'oral*
Considérons l'ED

$$5y'' + 17y' - 12y = 1 \quad (\mathrm{E})$$

1. Vérifier que $y(x) = -\dfrac{1}{18}$ est une solution particulière de cette ED. On note f cette solution.
   Est-ce la seule ?
2. Soit g une autre solution de l'ED (E) et h la fonction définie par $h = f - g$.
   Que vaut $5h'' + 17h' - 12h$?
   Déterminer alors une ED appelée (E_0) vérifiée par h.
   *On appelle cette équation l'**équation homogène associée à** (E).*
   Elle nous est utile car les ED considérées ici sont toutes linéaires, donc on retrouve à chaque fois le même raisonnement sur h
3. Résoudre alors l'équation du second degré

$$5r^2 + 17r - 12 = 0$$

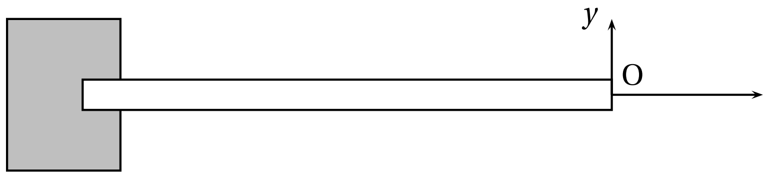
   On appelle cette équation l'équation caractéristique associée à (E_0)
4. Vérifier que les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{C}_1 e^{r_1 x} + \mathrm{C}_2 e^{r_2 x}$, avec C_1 et C_2 deux constantes réelles, et r_1 et r_2 les solutions trouvées à la question précédentes, sont solutions de (E_0)
   On admet grâce à nos connaissances sur les fonctions usuelles que ce sont les seules.
5. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Travail de l'élève 5 : *Menée ensemble à l'oral*
Considérons l'ED

$$9y'' - 6y' + y = 5 \quad (\mathrm{E})$$

1. Déterminer une solution constante particulière de cette ED. On note f cette solution.
2. Déterminer l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E), puis son équation caractéristique.
3. Résoudre cette équation caractéristique.
4. Vérifier que les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (\mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2)e^{rx}$ avec C_1 et C_2 deux constantes réelles et r la solution de l'équation caractéristique de la question précédente, sont solutions de (E_0)
   On admet grâce à nos connaissances sur les fonctions usuelles que ce sont les seules.
5. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Travail de l'élève 6 : Une entreprise étudie en laboratoire les propriétés vibratoires d'un nouveau matériau. Une barre de ce matériau est tenue horizontalement à une extrémité ; à l'autre extrémité elle est soumise à une force dirigée vers le bas et d'intensité variable. On considère, dans le repère indiqué sur la figure ci-dessous, l'ordonnée $y(t)$ de l'extrémité libre, en fonction du temps t.



L'étude du système mécanique conduit à considérer l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y' + 104y = -10,1\mathrm{e}^{-t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **Solution générale de l'équation homogène associée** (E_0)
   - **a.** Déterminer l'équation homogène (E_0) associée à (E)
   - **b.** Montrer que les solutions complexes de l'équation $r^2 + 4r + 104 = 0$ sont $r_1 = -2 + 10\mathrm{i}$ et $r_2 = -2 - 10\mathrm{i}$.
   - **c.** Vérifier que les fonctions f de la forme

     $$f(x) = \left(\mathrm{C}_1 \cos(10x) + \mathrm{C}_2 \sin(10x)\right)e^{-2x}$$

     où C_1, C_2 sont des constantes réelles, sont solutions de (E_0).
     On admet grâce à nos connaissances sur les fonctions usuelles que ce sont les seules.
2. **Recherche d'une solution particulère de** (E)
   Montrer que la fonction h, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = -0,1\mathrm{e}^{-t}$, est une solution de l'équation différentielle (E).
3. **Solution générale de** (E)
   En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. **Conditios initiales**
   Montrer que la solution f de l'équation différentielle (E) définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

   $$f(t) = -0,1\left[\mathrm{e}^{-t} - \cos(10t)\mathrm{e}^{-2t}\right]$$

   vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = -0,1$.

Il reste à représenter à l'aide d'un logiciel la famille des courbes représentatives des slutions d'une équation différentielle.

IV.2. Méthode de résolution

Elle se déroule en quatre étapes, selon le même plan que pour les ED du premier ordre.

Recherche de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0)

Définition 3.

Soit (E) l'ED

$$ay'' + by' + cy = d(x) \qquad \forall x \in I$$

On appelle équation homogène associée à (E) l'équation (E_0) :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \forall x \in I$$

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique du second degré :

$$ar^2 + br + c = 0$$

On calcule le discriminant Δ. Trois cas se présentent alors :

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles r_1 et r_2.
  La solutions générale de l'équation homogène (E_0) est alors constituée des fonctions f de la forme :

$$f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine réelles double r.
  La solutions générale de l'équation homogène (E_0) est alors constituée des fonctions f de la forme :

$$f(x) = (C_1 x + C_2) e^{rx}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjugués $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.
  La solutions générale de l'équation homogène (E_0) est alors constituée des fonctions f de la forme :

$$f(x) = \big(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\big) e^{\alpha x}$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation (E)

Comme pour les ED d'ordre 1

Résolution de (E)

Comme pour les ED d'ordre 1

Conditions initiales

Comme pour les ED d'ordre 1 sauf qu'ici il y a deux constantes à déterminer C_1 et C_2 et donc qu'il y a deux conditions initiales vérifiées par la solution particulière f_0, ce qui entraîne un système à résoudre. Ainsi, on sera tenté de vous demander simplement de vérifier que des conditions initiales sont remplies par une fonction f_0 donnée, solution de (E)

IV.3. Applications bêtes et méchantes

Exercice 14 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $y'' + 2y' - 3y = 0$
- $4y'' - 4y' + y = 0$
- $4y'' + 4y' + y = 0$
- $9y'' + y = 0$
- $9y'' - 6y' = 0$

Exercice 15 : On considère l'ED (E) : $y'' + 4y' - 5y = 10$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$
2. En déduire la solution générale de l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière constante de (E).
4. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).
5. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$

Exercice 16 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes avec les conditions initiales données

- $y'' - 2y' - 3y = 5,\ y(4) = 1$ et $y'(0) = 1$
- $y'' + 6y' + 10y = 4,\ y(2) = 3$ et $y'(0) = -1$
- $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 1$ et $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

Exercice 17 : On considère l'ED (E) : $y'' + 3y' + 2y = 3t + 7$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$
2. En déduire la solution générale de l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière u de (E) de la forme $u(t) = \alpha t + \beta$, où α et β sont des constantes réelles à déterminer.
4. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Exercice 18 : On considère l'ED (E) : $y'' + 4y' + 5y = 10t - 2$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + 4x + 5 = 0$
2. En déduire la solution générale de l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière u de (E) de la forme $u(t) = \alpha t + \beta$, où α et β sont des constantes réelles à déterminer.
4. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).
5. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

Exercice 19 : On considère l'ED (E) : $2y'' - 5y' - 3y = -3t^2 - 10t + 4$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$
2. En déduire la solution générale de l'équation homogène associée à (E).

3. Montrer que la fonction carré est une solution particulière de (E)
4. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).
5. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$

Exercice 20 : On considère l'ED (E) : $y'' + 4y' = \sin(t)$

1. Déterminer la solution générale de l'équation homogène associée à (E).
2. Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = \dfrac{1}{3}\sin(t)$ est une solution particulière de (E)
3. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

IV.4. Type CCF

Exercice 21 : **A. Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad y" + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 2r + 1 = 0$.

   b. En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

   $$(\mathrm{E}_0): \quad y'' + 2y' + y = 0.$$

2. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   Une solution de l'équation différentielle (E) est donnée par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessous.

$g(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$	$h(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$	$k(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$

   Les dérivées première et seconde de ces fonctions sont données ci-dessous (ces calculs sont exacts).

$$g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} \qquad h'(x) = \left(2x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad k'(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x}$$
$$g''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} \qquad h''(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad k''(x) = (-4+2x)\mathrm{e}^{-x}$$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution (de J'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 22 : On étudie le mouvement d'une masse fixée à l'extrémité d'un ressort soumis à un mouvement fluide, dans le cas d'un mouvement entretenu.

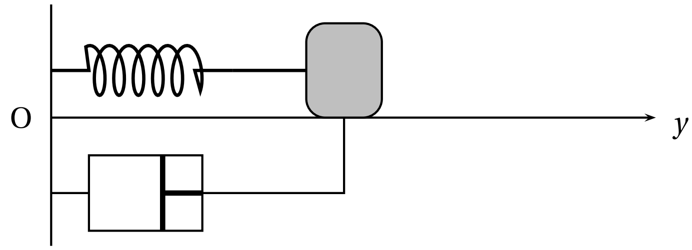


FIGURE 1 –

On considère, dans le repère indiqué sur la figure 1, l'allongement horizontal $y(x)$ du ressort en fonction du temps x.

L'étude du système mécanique conduit à considérer l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad \text{(E)}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $r^2 + 3r + 2 = 0$.
   b. En déduire les solutions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E') :

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \qquad \text{(E')}$$

2. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -x\mathrm{e}^{-2x}$. Un logiciel de calcul formel fournit l'expression de la dérivée et de la dérivée seconde sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de g sous la forme $g'(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ et $g''(x) = (4-4x)\mathrm{e}^{-2x}$.
   Ces résultats sont admis et ne sont donc pas à démontrer.
   Montrer que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0{,}5$ et $f'(0) = -2$.

Exercice 23 : On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = -2\mathrm{e}^x + 6$ où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
   b. En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_0) : \ y'' - 3y' + 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x\mathrm{e}^x + 3$.
   a. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
   La fonction dérivée g' de la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g'(x) = 2\mathrm{e}^x$	$g'(x) = 2x\mathrm{e}^x$	$g'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x$

b. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 24 : On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y'' - 2y' + y = 8\mathrm{e}^x.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) : \quad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2\mathrm{e}^x$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

Exercice 25 : On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \ : \quad y'' + 2y' - 3y = -4\mathrm{e}^x,$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) : y'' + 2y' - 3y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x\mathrm{e}^x$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 26 : Trouver des TP sur la résistance des matériaux et les circuit électronique