Nom : .... **Prénom :** .... **Classe : 1G4**

INTERRO N° 6

Exercice 1 :

On considère les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 7-3n \qquad ; \qquad v_n = n^2-3n+1 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = 2\sqrt{w_n}+2 \end{cases}$$

1. a. Calculer u_0 ; u_1 et u_7

$u_0 = 7-3\times 0 = 7$, $u_1 = 7-3 = 4$ et $u_7 = 7-3\times 7 = 7-21 = -14$.

b. Etudier les variations de la suite u.

Etudions le signe de la différence entre deux termes successifs quelconque :

$$u_{n+1}-u_n = 7-3(n+1)-(7-3n) = 7-3n-3-7+3n = -3 < 0$$

On vient de démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n < 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$$

Par conséquent la suite u est décroissante.

c. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < -100$.

$$u_n < -100 \Longleftrightarrow 7-3n < -100 \Longleftrightarrow -3n < -107 \Longleftrightarrow n > \frac{-107}{-3} \simeq 35,3$$

Ainsi le plus petit entier naturel n tel que $u_n < -100$ est $n = 36$.

d. Que peut-on conjecturer quant à la limite de la suite u ?

On peut penser que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1}-v_n = 2n-2$$

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1}-v_n = (n+1)^2-3(n+1)+1-(n^2-3n+1) = n^2+2n+1-3n-3+1-n^2+3n-1 = 2n-2$$

b. En déduire qu'à partir de $n = 1$ la suite v est croissante.

v est croissante si et seulement si

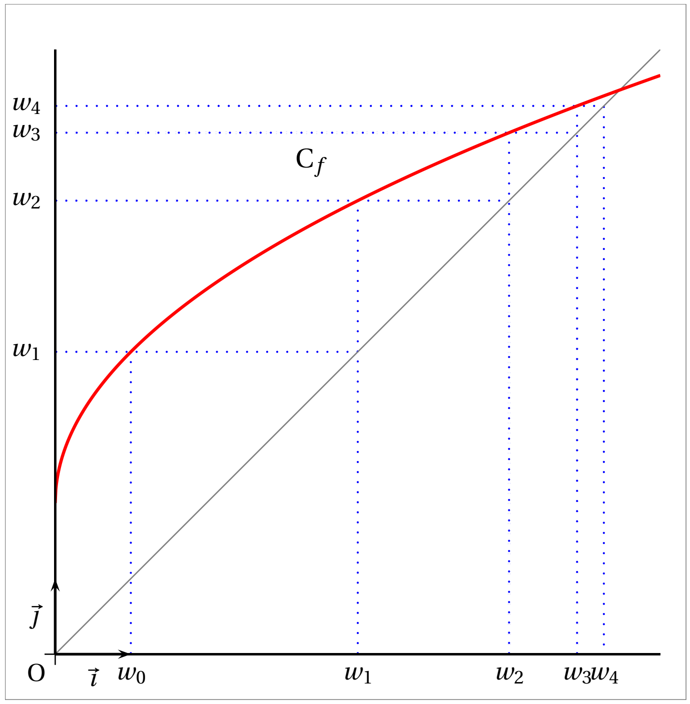
$$v_{n+1}-v_n \geq 0 \Longleftrightarrow 2n-2 \geq 0 \Longleftrightarrow 2n \geq 2 \Longleftrightarrow n \geq 1$$

v est donc croissante à partir de $n = 1$.

3. a. Calculer w_1 et w_2.

$w_1 = 2\sqrt{w_0}+2 = 2\sqrt{1}+2 = 4$ et $w_2 = 2\sqrt{w_1}+2 = 2\sqrt{4}+2 = 6$

b. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{x}+2$ et la droite d'équation $y = x$. Placer sur l'axe des abscisses, en s'aidant du graphique, les termes w_0 ; w_1 ; w_2 ; w_3 et w_4.



c. Conjecturer le sens de variation de la suite w ainsi que la limite de la suite w.

Sur le graphique il apparait que w_0, w_1, w_2, w_3 et w_4 sont rangés dans l'ordre croissante, nous pouvons raisonnablement conjecturer que w est croissante.

Les termes de la suites w se rapproche de l'abscisse du point d'intersection de la représentation graphique de f avec la droite d'équation $y = x$ d'où la conjecture suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} w_n \simeq 7,5$$

d. **Bonus** : Retrouver la limite de la suite w par le calcul.

Nous cherchons donc le réel x vérifiant $f(x) = x$ c'est-à-dire la solution de l'équation :

$$2\sqrt{x} + 2 = x \Longleftrightarrow 2\sqrt{x} = x - 2 \Longrightarrow (2\sqrt{x})^2 = (x-2)^2 \Longrightarrow 4x = x^2 - 4x + 4 \Longleftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$$

Le discriminant de ce trinôme vaut :

$$\Delta = 64 - 4 \times 1 \times 4 = 64 - 16 = 48$$

Et donc l'équation $x^2 - 6x + 4 = 0$ admet deux solutions :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2}$$

Or, $\dfrac{8 - \sqrt{48}}{2} < 1$ n'est pas solution du problème puisque les termes de la suite w sont très clairement tous supérieur à 1 donc la suite w converge vers $\dfrac{8 + \sqrt{48}}{2} = 4 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3} \simeq 7,5$

INTERRO N° 6

Exercice 1 : On considère les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = -7+3n \quad ; \quad v_n = 1-n^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_0 = 7 \\ w_{n+1} = -\dfrac{2}{3}w_n - 1 \end{cases}$$

1. **a.** Calculer u_0 ; u_1 et u_7

$u_0 = -7+3\times 0 = -7$, $u_1 = -7+3 = -4$ et $u_7 = -7+3\times 7 = -7+21 = 14$.

b. Etudier les variations de la suite u.

Etudions le signe de la différence entre deux termes successifs quelconque :

$$u_{n+1} - u_n = -7+3(n+1) - (-7+3n) = -7+3n+3+7-3n = 3 > 0$$

On vient de démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$$

Par conséquent la suite u est croissante.

c. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 100$.

$$u_n > 100 \Longleftrightarrow -7+3n > 100 \Longleftrightarrow 3n > 107 \Longleftrightarrow n > \frac{107}{3} \simeq 35,3$$

Ainsi le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100$ est $n = 36$.

d. Que peut-on conjecturer quant à la limite de la suite u ?

On peut penser que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} - v_n = -2n-1$$

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} - v_n = 1-(n+1)^2 - \left(1-n^2\right) = 1-(n^2+2n+1) - 1 + n^2 = 1 - n^2 - 2n - 1 - 1 + n^2 = -2n-1$$

b. En déduire que la suite v est décroissante.

v est décroissante si et seulement si $v_{n+1} - v_n \leq 0$. Or d'après la question précédente :

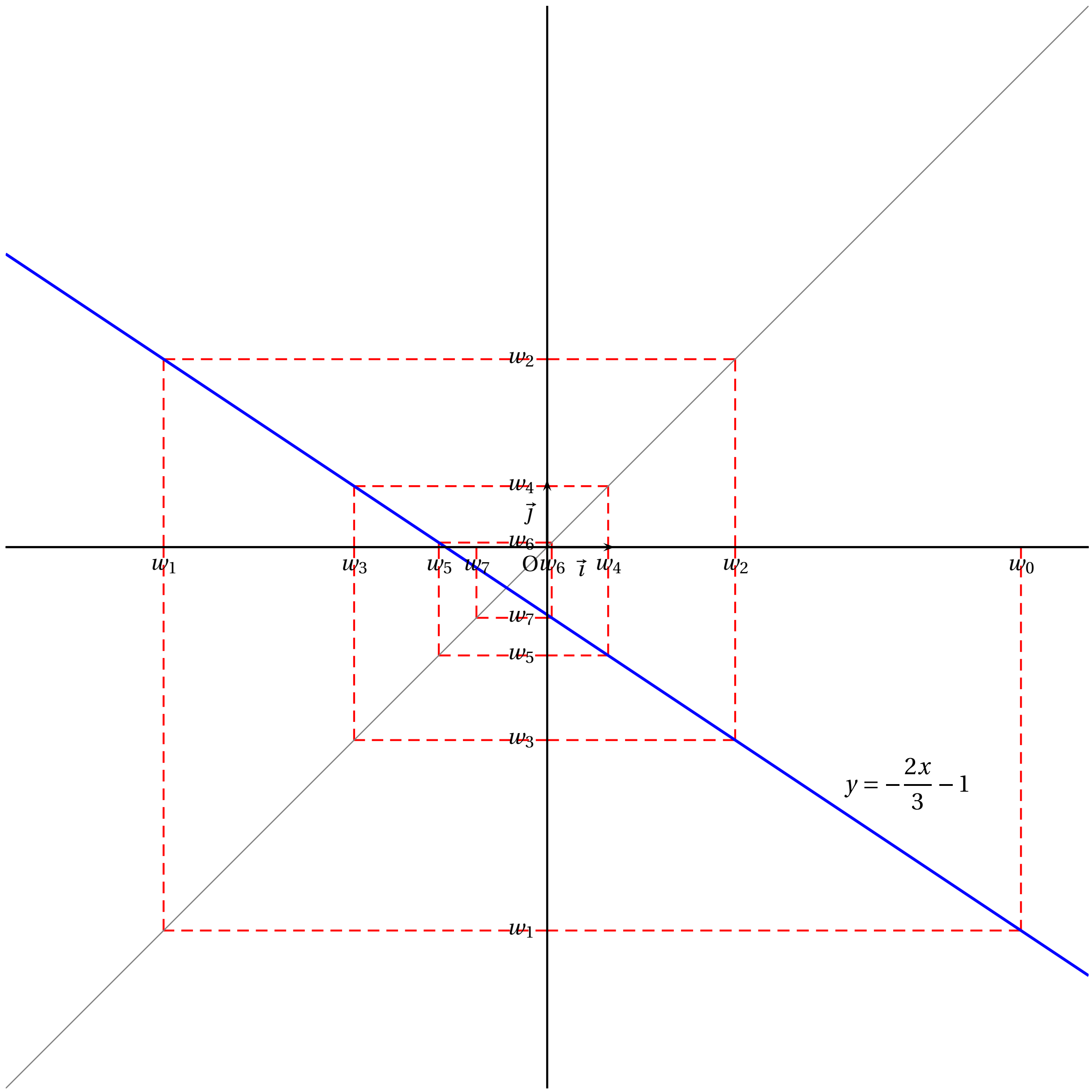
$$v_{n+1} - v_n = -2n-1 < 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

On en déduit que la suite v est décroissante.

3. **a.** Calculer w_1 et w_2.

$$w_1 = -\frac{2}{3}w_0 - 1 = -\frac{2}{3}\times 7 - 1 = -\frac{14}{3} - 1 = -\frac{17}{3} \qquad \text{et} \qquad w_2 = -\frac{2}{3}w_1 - 1 = -\frac{2}{3}\times\left(-\frac{17}{3}\right) - 1 = \frac{34}{9} - 1 = \frac{25}{9}$$

b. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{3}x - 1$ et la droite d'équation $y = x$. Placer sur l'axe des abscisses, en s'aidant du graphique, les termes w_0 ; w_1 ; w_2 ; w_3 et w_4.



---

c. Conjecturer le sens de variation de la suite w ainsi que la limite de la suite w.

Sur le graphique il apparait que w_0, w_1, w_2, w_3 et w_4 sont rangés ni dans l'ordre croissant ni dans l'ordre décroissant, nous pouvons affirmer que w n'est ni croissante ni décroissante.

Les termes de la suites w se rapproche de l'abscisse du point d'intersection de la représentation graphique de f avec la droite d'équation $y = x$ d'où la conjecture suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} w_n \simeq -0,5$$

d. **Bonus** : Retrouver la limite de la suite w par le calcul.

Nous cherchons donc le réel x vérifiant $f(x) = x$ c'est-à-dire la solution de l'équation :

$$-\frac{2}{3}x - 1 = x \Longleftrightarrow -1 = x + 2/3x \Longrightarrow -1 = \frac{5}{3}x \Longrightarrow x = -\frac{3}{5} = -0,6$$

donc la suite w converge vers $-0,6$