∽ DEVOIR SURVEILLÉ ∽
NOMBRE DÉRIVÉ

Exercice 1 : **(6 points)**

1. $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a

$$f'(-2) = -\frac{3}{2} \qquad f'(7) = \frac{2}{3} \qquad f'(1) = 1 \qquad f'(0) = -\frac{1}{2} \qquad f'(-5) = 3 \qquad f'(3) = 0$$

2. Par lecture graphique et un peu de réflexion, on trouve :

$$\mathrm{T}_3 : y = 1 \quad , \quad \mathrm{T}_{-5} : y = 3x + 16 \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_7 : y = \frac{2}{3}x - \frac{14}{3}$$

Exercice 2 : On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$. **(4 points)**

1. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On a $f(2+h) = 3(2+h)^2 - 5(2+h) - 1 = \ldots = 3h^2 + 7h + 1$

   Et $f(2) = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 - 1 = \ldots = 1$

   Ainsi $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{3h^2 + 7h + 1 - 1}{h} = \ldots = \dfrac{3h^2}{h} + \dfrac{7h}{h} = 3h + 7$

   Or $\lim\limits_{h \to 0} 3h + 7 = 7 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 7$.

2. On sait que $\mathrm{T}_2 : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ Or $f(2) = 1$ et $f'(2) = 7$

   Donc $\mathrm{T}_2 : y = 7(x-2) + 1 \iff \ldots \iff \mathrm{T}_2 : y = 7x - 13$

Exercice 3 : On appelle f la fonction racine carré. **(6 points)**

1. **a.** $\tau = \dfrac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$

   b. $\tau = \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \times \dfrac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} = \ldots = \dfrac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \dfrac{1}{\sqrt{4+h} + 2}$

   c. Or $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{4+h} = \sqrt{4} = 2$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$

   d. La tangente au point d'abscisse 4 de la courbe représentative de la fonction racine carré a pour coefficient directeur $f'(4) = \dfrac{1}{4}$

2. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $0 + h \geq 0$ (ie $h > 0$). $\tau(0, 0+h) = \dfrac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$

   Or $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{h} = 0$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ ce qui n'est pas un nombre réel : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4 : Soit $a \in]0;+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in]0;+\infty[$. **(4 points)**

$$\begin{aligned}
\tau(a; a+h) &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right) \times \frac{1}{h} \\
&= \left(\frac{1 \times a}{(a+h) \times a} - \frac{1 \times (a+h)}{a \times (a+h)}\right) \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{-h}{a(a+h)}) \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} a + h = a$ Donc $\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a \times a} = -\dfrac{1}{a^2}$ Comme $a \neq 0$, $-\dfrac{1}{a^2} \in \mathbb{R}$.

Donc la fonction inverse est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ pour tout $a \in]0;+\infty[$